Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Angaben:

1. Die Ebene ε ist definiert durch folgende Gleichung: $3x - 2 + 2y - z = 10$.
   Bestimme eine Parameterform dieser Ebene.
   Ist diese Ebene ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$? Falls ja, bestimme eine mglichst einfache Basis!

2. Die Ebene ω ist durch folgende drei Punkte gegeben: $P_1(1,1,4), P_2(2,2,1), P_3(3,3,5)$.
   Bestimme eine Parameter- und Normalvektorform von ω.
   Ist ω ein Unterraum? Wenn ja, bestimme eine mglichst einfache Basis!

Loesungen:

1. $\varepsilon := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 3x - 2 + 2y - z = 10\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 3x + 2y + (-1)z = 12\}.$

   Verwende nun x und y als Parameter, z ergibt sich dann aus ihnen.

   $$\varepsilon = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | z = -12 + 3x + 3y\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -12 + 3x + 3y \end{pmatrix} \}.$$

   Verwende nun die Rechengesetze fr Vektoren:

   $$\varepsilon = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 3y \end{pmatrix} \} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \} = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

   Die Ebene ε geht also (offensichtlich ;-)) nicht durch den Ursprung o und kann damit kein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ sein.

2. Parameterform von ω: Bentige dafr zwei Richtungsvektoren v_1, v_2:

   $$v_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$
   $$v_2 := \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
   $$\omega = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P_1 + \mu \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2 | \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} | \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + (1 + \lambda) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} | \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + (\gamma) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} | \mu, \gamma \in \mathbb{R}\} = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}]$$

   Bestimme den Normalvektor auf die Ebene durch kreuzen von v_1 und v_2 (Kreuzprodukt!)

   $$n = v_1 \times v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - (-3) \\ -(4 - (-3)) \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Htte man diesen Normalvektor auch nur durch berlegen bekommen knnen? Tipp: Skizziere die Ebene, die von den beiden Richtungsvektoren aufgespannt wird!

   Eine Normalvektorform der Ebene lautet daher:

$$x = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | n_1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = n_1 \cdot P_1 \} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \} =$$

$$\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | 1x + (-1)y + 0z = 1 + (-1) + 0 \cdot 4 \} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} | x - y = 0 \}$$

Zurck zur Parameterform oben: Wir erkennen, dass es bei der Ebene um die lineare Hlle zweier (linear unabhngigen: nachrechnen!) Vektoren handelt. Die lineare Hlle ist immer ein Unterraum eines Vektorraums, somit ist ω ein Unterraum.

Bei der Normalvektorform der Ebene zeigt sich der Unterraum darin, dass wir eine (in x, y, z lineare Gleichung haben, die keine Zahl ohne Variable beinhaltet (die rechte Seite ist 0). Man spricht von einer homogenen linearen Gleichung. Ist eine Menge durch eine homogene lineare Gleichung charakterisiert, so handelt es sich immer um eine lineare Hlle von Vektoren und somit um einen Unterraum:
whle z und y als Parameter: dann ist $x = 1y + 0z$

$$\omega = \{ \begin{pmatrix} 1y + 0z \\ 1y + 0z \\ z \end{pmatrix} \} = \{ \begin{pmatrix} 1y \\ 1y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \} = \{ y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} = \{ \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

$$\lambda \cot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} | \mu, \lambda \in \mathbb{R} \}.$$

Die beiden Vektoren $(1, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 1)^T$ sind offensichtlich linear unabhngig und somit eine Basis des Unterraums. Mache zur Veranschaulichung eine Skizze mit der Ebene ω, den beiden Basisvektoren und dem Normalvektor!