Bsp zu linearer Unabhängigkeit

K = $\mathbb{R}$., $V := \mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} | x, y \in \mathbb{R} \right\}$

Sind die folgenden beiden Vektoren lu (linear unabhängig)?

Seien $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Zu untersuchen: Gibt es reelle Skalare α und β, sodass $\alpha v + \beta w = \mathrm{o}$ gilt, aber $\alpha \neq 0$ und $\beta \neq 0$?
Bzw. gleichwertig: Folgt aus $\alpha v + \beta w = \mathrm{o}$, dass zwingenderweise : $\alpha = ß = 0$?

Ansatz:

$$\alpha v + \beta w = o$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot 1 \\ \alpha \cdot 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta \cdot 2 \\ \beta \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2ß \\ 2\alpha + ß \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn alle ihre Komponenten gleich sind. Das führt nun auf ein Gleichungsystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

I: $\alpha + 2ß = 0$
II: $2\alpha + ß = 0$

Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man als einzige Lösungen: $\alpha = ß = 0$.

D.h. aus $\alpha v + \beta w = \mathrm{o}$ folgt zwingenderweise („automatisch“), dass sowohl Alpha und Beta 0 sein müssen. (vgl. Definition linearer Unabhängigkeit).

Also sind v und w linear unabhängig.