Höhere Anwendungen

Im zweiten Kapitel unterhielten wir uns ja schon etwas über die Kraft, das zweite Newton'sche Gesetz und aus der Kraft resultierende Energie – eher im ein-dimensionalen Fall alles. Das ganze kann man natürlich auch in drei Dimensionen machen.

Eine Kraft kann man im drei-Dimensionalen, wie auch die Raumkurve $\vec{s}(t)$, als einen Vektor $\vec{F}$ auffassen. Streng genommen, kann die Kraft von mehreren Variablen abhängen, von der Zeit t, aber auch von den Ortskoordinaten x, y und z, d.h. $\vec{F}(t,x,y,z)$. Für den Moment wollen wir hier aber nur Kräfte betrachten, die in den einzelnen Raumrichtungen konstant sind, das heißt F ist unabhängig von t, x, y und z. Wir haben das bereits bekannte Gesetz $dW = F\ ds$, das nun zu $dW = \vec{F}.d\vec{s}(t)$ wird. Die Energie ist eine einfache Zahl, kein Vektor, sprich eine „skalare Größe". Wie macht man aus zwei Vektoren eine skalare Größe? Mit dem Skalarprodukt, daher auch der Punkt zwischen $\vec{F}$ und $d\vec{s}$. Bleibt die noch etwas kniffligere Frage, was ist eigentlich $d\vec{s}$? Das ist ein kleines Stück in Richtung einer Vektorfunktion, welche nur von t abhängt. Hier gibt es mehrere Zugänge, wie man das erklären kann. Ein mathematisch einfacher Zugang ist, wir wissen $\frac{d\vec{s}(t)}{dt} = \dot{\vec{s}}(t)$ und damit folgt $d\vec{s} = \dot{\vec{s}}dt$. Die Formel wird zu $W = \int \vec{F}.\dot{\vec{s}}(t)\ dt$. Sprich, wir bilden das Skalarprodukt von F und der Ableitung von s, was genau der Geschwindigkeit entspricht, und integrieren das ganze über t.

Beispiel:

Auf der Erdoberfläche ist die Schwerkraft praktisch konstant und wirkt nur nach unten. Man kann die Kraft schreiben als $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$. Fährt man mit dem Rad einen Berg hinauf, auf einer möglicherweise sehr komplizierten Raumkurve $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 3\sin(4t) - 5\cos(3.7t)^2 + 0.1t \\ \sinh(3.2t) - \tan(0.02t) - 0.1t \\ 0.5t \end{pmatrix}$ und man will die verrichtete physikalische Arbeit berechnen (unter Vernachlässigung von Reibung, Luftwiderstand etc.), so bestimmt man zuerst $\vec{F}.\dot{\vec{s}}(t)$. Da ja $\vec{F}$ nur nach unten einen Wert ungleich Null hat, reicht es die Ableitung von $s(t)$ nur für die z-Komponente zu berechnen, da die anderen beim Skalarprodukt ohnehin gleich Null werden. Folglich ist $\vec{F}.\dot{\vec{s}}(t) = -mg * 0.5$ und damit ist die verrichtete Arbeit $W = \int -0.5mg\ dt = -0.5\ mgt_1 + 0.5mgt_0$. Setzt man einen Radfahrer mit 70 kg ein und eine Fahrtzeit von $t_0 = 0$ bis $t_1 = 3600$ Sekunden, so erhält man $W = -1236060\ Joule$ bzw. $W = -295\ kcal$. Das Minuszeichen vor der Energie, sagt bloß aus, dass bei diesem Vorgang Energie „verbraucht" wurde. Der tatsächliche „Energieverbrauch" des Radfahrers ist um einiges größer aufgrund von Reibung und auch einem relativ schlechten Wirkungsgrad der Muskeln.

Als Letztes gehen wir in diesem Lernpfad – alleine schon der Berühmtheit wegen – auf die vier Maxwell-Gleichungen ein. Diese lauten:

1. $\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$
2. $\nabla.\vec{B} = 0$
3. $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{dt}$
4. $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{dt}$

Die Maxwellgleichungen beschreiben das elektromagnetische Feld und damit unter anderem elektromagnetische Wellen und damit insbesondere die Ausbreitung von Licht. Die in den Gleichungen vorkommenden Größen sind das elektrische Feld $\vec{E}$, das magnetische Feld $\vec{B}$, die elektrische Ladungsdichte ρ, der elektrische Strom $\vec{j}$ sowie die Konstanten μ_0 und ε_0. Der sogenannte Nabla-Operator ∇ ist salopp gesagt einfach ein Vektor, dessen Einträge die Ableitungen nach den einzelnen Raumrichtungen sind, also $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{dy}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$. Damit ist das Skalarprodukt $\nabla.\vec{E}$ nichts anderes als die Summe über die Ableitungen, das Ergebnis der Rechnung ist ein Skalar. $\nabla \times \vec{E}$ steht für das Kreuzprodukt, das Ergebnis ist ein Vektor. Dementsprechend ist die Verwendung des Nabla-Operators bloß eine Kurzschreibweise:

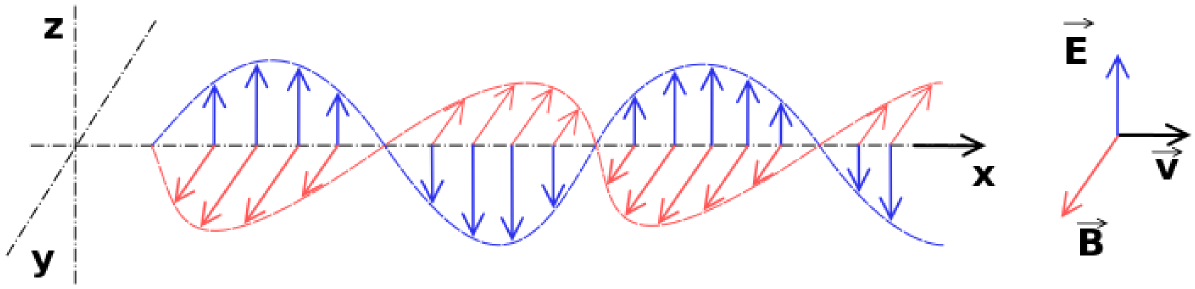
$$\nabla.\vec{E} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z$$

Damit ist die erste Maxwellgleichung $\nabla.\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ aus mathematischer Sicht eine partielle, inhomogene Differenzialgleichung. Sie wird oft auch als Gauß'sches Gesetz bezeichnet. Aus physikalischer Sicht kann man etwas salopp sagen, dass die Summe über die Steigungen des elektrischen Feldes nicht (überall) verschwindet. Das kann aber nur sein, wenn das Feld an gewissen Punkten Maxima und Minima aufweist – an diesen Punkten findet man elektrische Ladungen, welche eben genau das vorliegende elektrische Feld hervorrufen (im statischen Fall). Folglich liegt der Ursprung des elektrischen Feldes in elektrischen Ladungen, und in den Maxima und Minima – auch als Quellen und Senken des Feldes bezeichnet – findet man eine gewisse Ladungsdichte ρ.

Die Aussage des zweiten Gesetzes ist ähnlich, mit dem Unterschied, dass das Magnetische Feld NICHT durch „magnetische Ladungen" hervorgerufen wird. Das Gesetz besagt stattdessen, dass es gar keine magnetischen Monopole gibt. Bricht man zum Beispiel einen Stabmagneten in der Mitte auseinander, so hält man nicht einen Nordpol und einen Südpol in der Hand, sonder hat zwei kleiner Magneten mit JEWEILS Nord- und Südpol.

Das dritte Gesetz besagt, wenn man ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld hat, dann induziert dieses ein rechtwinklig darauf stehendes und sich änderndes („rundherum wirbelndes“) elektrisches Feld. Das Vierte macht genau die umgekehrte Aussage, ein sich zeitlich änderndes elektrisches Feld (bzw. ein fließender Strom), erzeugt ein herumwirbelndes Magnetfeld.

Führt man beide Aussagen zusammen, so erkennt man (physikalisch etwas leichter als mathematisch), dass ein sich änderndes elektrisches Feld ein sich änderndes Magnetfeld aufbaut, das sich ändernde Magnetfeld induziert ein sich änderndes elektrisches Feld, welches wiederum ein Magnetfeld erzeugt, welches dann … Den Gedanken kann man beliebig lange fortsetzen. Dies ist die (mathematische) Geburtsstunde der elektromagnetischen Wellen, die sich beliebig lange durch den ganzen Raum ausbreiten können (solange sie nicht auf ein Hindernis treffen natürlich). Die Frequenz der Welle entspricht genau 1 durch die Zeit, die es benötigt, um von einem zusammenbrechenden elektrischen Feld bis wieder zurück zum gleichen elektrischen Feld zu kommen.



Mit etwas mathematischem Geschick kann man aus den Maxwellgleichungen die Wellengleichung für das elektrische Feld ableiten:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

c steht hier für die Lichtgeschwindigkeit, also die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle.

Andere Gesetze die man aus diesen grundlegenden Formeln ableiten kann sind das Induktionsgesetz, die Lorentzkraft, das Ohm’sche Gesetz und praktisch alles andere auch was mit Elektrizität oder Magnetismus oder Optik zu tun hat. Damit sind diese vier Differenzialgleichungen die Grundbausteine des Elektromagnetismus. Ähnlich wie die Newton’schen Gesetze die Grundbausteine der Mechanik sind und die Schrödingergleichung der Grundbaustein der Quantenmechanik.