Rechenregeln für Summen

Im Umgang mit Summen sind gewisse Regeln zu beachten.

1 Summe gleicher Summanden

Betrachten wir folgende Summe:

$$\sum_{i=1}^{n} x$$

Hier enthält x keinen Summationsindex, d.h. es wird x einfach n-mal aufsummiert:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n-mal} = nx}$$

Eine ähnliche Situation besteht bei folgender Summe:

$$\sum_{i=1}^{n} x_l$$

Hier besitzt x zwar einen Summationsindex, aber dieser ist ungleich dem Index des Summenzeichens, d.h. x_l ist in diesem Fall ebenfalls als Konstante zu behandeln:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_l = nx_l}$$

2 Multiplikation mit einem konstanten Faktor

In der Summe

$$cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n$$

wird jede Realisierung der Variable X mit einem konstanten Faktor c multipliziert. Dieser Faktor könnte jede beliebige Zahl sein. Aus dieser Summe kann man den konstanten Faktor herausziehen, d.h.

$$\boxed{cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n = c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).}$$

Ein Beispiel dazu:

Seien $x_1, \ldots, x_5$ 5 verschiedene Körpergewichte (in kg):

$$\begin{aligned} x_1 &= 75 \\ x_2 &= 80 \\ x_3 &= 85 \\ x_1 &= 90 \\ x_1 &= 100 \end{aligned}$$

Wenn es jeweils 2 Personen mit demselben Körpergewicht gibt, dann ist das Gesamtgewicht aller Personen:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{5} 2x_i &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 \\ &= 2 * 75 + 2 * 80 + 2 * 85 + 2 * 90 + 2 * 100 \\ &= 150 + 160 + 170 + 180 + 200 \\ &= \underline{860}. \end{aligned}$$

Eine alternative Vorgangsweise das Gesamtgewicht auszurechnen ist:

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{5} x_i &= 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) \\ &= 2(75 + 80 + 85 + 90 + 100) \\ &= 2 * 430 \\ &= \underline{860} \end{aligned}$$

Eine oft angewendete Rechenregel ist:

Falls x_i Messwerte sind, dann sind $x_i^* = cx_i + d$ “linear transformierte” Messwerte. Ihre Summation ergibt

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^* = \sum_{i=1}^{5} (cx_i + d)$$

$$
\begin{aligned}
&= cx_1 + d + cx_2 + d + \ldots + cx_n + d \\
&= cx_1 + cx_2 + \ldots + cx_n + \underbrace{d + \ldots + d}_{n-mal} \\
&= c(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + nd \\
&= c\sum_{i=1}^{n} x_i + nd
\end{aligned}
$$

3 Aufspalten einer Summe

Es erweist sich manchmal als notwendig eine Summe aufzuspalten, d.h.:

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} x_i &= \underbrace{x_1 + \ldots + x_a} + \underbrace{x_{a+1} + \ldots + x_b} + \ldots + \underbrace{x_{m+1} + \ldots + x_n} \\
&= \sum_{i=i}^{a} x_i + \sum_{i=a+1}^{b} x_i + \sum_{i=m+1}^{n} x_i
\end{aligned}
}
$$

$(1 \leq a < b < \ldots < m < n)$.

Wenn z.B. eine Person die Haushaltsausgaben (monatlich) eines Jahres in die 4 Quartale aufteilen will (x_i sind die Ausgaben des i-ten Monats in Euro, $i = 1, \ldots, 12$), dann schreibt man

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{12} x_i &= \underbrace{x_1 + x_2 + x_3}_{Ausgaben\ 1.Quartal} + \underbrace{x_4 + x_5 + x_6}_{Ausgaben\ 2.Quartal} \\
&\quad + \underbrace{x_7 + x_8 + x_9}_{Ausgaben\ 3.Quartal} + \underbrace{x_{10} + x_{11} + x_{12}}_{Ausgaben\ 4.Quartal} \\
&= \sum_{i=1}^{3} x_i + \sum_{i=4}^{6} x_i + \sum_{i=7}^{9} x_i + \sum_{i=10}^{12} x_i.
\end{aligned}
$$

4 Addition von Summen gleicher Länge

Es gilt

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i + c_i + \ldots) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i + \ldots}$$

Da die Reihenfolge der Summation von Faktoren beliebig ist, kann man z.B. die Summe

$$\underbrace{\overbrace{a_1 + b_1 + c_1}^{i=1} + \overbrace{a_2 + b_2 + c_2}^{i=2}}_{\sum_{i=1}^{2} a_i + b_i + c_i}$$

auch folgendermaßen anschreiben:

$$\underbrace{a_1 + a_2}_{\sum_{i=1}^{2} a_i} + \underbrace{b_1 + b_2}_{\sum_{i=1}^{2} b_i} + \underbrace{c_1 + c_2}_{\sum_{i=1}^{2} c_i}.$$

5 Umindizierung

Wenn a eine beliebige ganze Zahl ist, gilt

$$\boxed{\sum_{i=0}^{n} x_i = x_0 + x_1 + \ldots + x_n = x_{a-a} + x_{1+a-a} + \ldots + x_{n+a-a} = \sum_{j=a}^{n+a} x_{j-a}}$$

Das heisst, man kann die Grenzen einer Summe ändern, indem man den ursprünglichen Summationsindex '*substituiert*'. Wenn z.B. der Index i von 0 bis n läuft, und man substituiert i im Faktor x_i mit $j - a$ (wobei a eine ganze Zahl ist), dann muss $j - a$ natürlich auch von 0 bis n laufen.

$$i = j - a => j = a + i = (\text{da } i = 0, \ldots, n) = a + 0, a + 1, \ldots, a + n$$

D.h. der neue Laufindex j läuft von a bis $n + a$:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{j=a}^{n+a} x_{j-a}$$

6 Doppelsummen

Eine Doppelsumme ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j &= x_1y_1 + x_2y_1 + \ldots + x_ny_1 \\ &\quad + x_1y_2 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_2 \\ &\qquad \vdots \\ &\quad + x_1y_n + x_2y_n + \ldots + x_ny_n.\end{aligned}$$

Dazu ein Beispiel falls $n = 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} x_i y_j &= \sum_{i=1}^{2}(\underbrace{\overbrace{x_i * y_1}^{j=1} + \overbrace{x_i * y_2}^{j=2}}_{\sum_{j=1}^{2} x_i y_j}) \\ &= \underbrace{x_1 * y_1 + x_1 * y_2}_{i=1} + \underbrace{x_2 * y_1 + x_2 * y_2}_{i=2} \\ &= x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2 + x_2y_2.\end{aligned}$$

7 Weitere Regeln, die zu beachten sind

Im allgemeinen ist

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

ungleich

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

Dazu ein Beispiel. Nehmen wir an, dass $n = 2$. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{2} x_i y_i = x_1y_1 + x_2y_2$$

und

$$\left(\sum_{i=1}^{2} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2} y_i\right) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2,$$

wobei im allgemeinen

$$x_1y_1 + x_2y_2 \neq x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Weiters gilt

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Auch hierzu ein Beispiel (wieder für n=2):

$$\sum_{i=1}^{2} x_i^2 = x_1^2 + x_2^2$$

und

$$\left(\sum_{i=1}^{2} x_i\right)^2 = (x_1+x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2,$$

wobei auch hier im allgemeinen gilt

$$x_1^2 + x_2^2 \neq x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

8 Sonderfälle

Ein wichtiger Sonderfall ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Beispiel:

$$1 + 2 + \ldots + 100 = \frac{100 * 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung wollen wir durch *vollständige Induktion* beweisen. Diese Methode funktioniert folgendermaßen:

Man betrachtet eine mathematische Aussage, in unserem Fall

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

die für alle möglichen n gelten soll (wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist).

1. Man zeigt zuerst, dass die Behauptung für ein fixes n, üblicherweise $n = 1$, stimmt (**Induktionsanfang**).

2. Der nächste Schritt ist, dass wir *annehmen*, daß die Behauptung für n stimmt (**Induktionsannahme**).

3. Bleibt zu zeigen, dass die Behauptung für $n + 1$ stimmt, unter der *Annahme*, dass sie für n erfüllt ist (**Induktionsschluss**).

D.h., wir zeigen zuerst, dass die Formel für $n = 1$ gilt. Aufgrund von Punkt 3 muss die Formel für ALLE n gelten, also $n = 1, 2, 3, \ldots$, weil man immer den Schritt von $n \to n + 1$ macht. Wenn man mit 1 startet ist der Induktionsschritt $1 \to 2$, d.h. die Formel gilt auch für $n = 2$. Wenn sie für $n = 2$ gilt muss sie auch für $n = 3$ (Induktionsschritt $2 \to 3$) gelten, usw.

Wir wollen also zuerst zeigen, dass

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2},$$

für $n = 1$ gilt:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{2}{2} = \frac{1 * 2}{2} = \frac{1(1+1)}{2}$$

also eine wahre Aussage. Jetzt zeigen wir, dass die Formel auch für $n + 1$ stimmt, wenn wir annehmen, daß sie für n stimmt, d.h.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \underbrace{1 + 2 + \ldots + (n-1) + n}_{\sum_{i=1}^{n} i} + (n+1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}_{Ind.annahme} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2},
\end{aligned}
$$

womit der Induktionsbeweis abgeschlossen ist.

Ein zweiter wichtiger Sonderfall ist

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Die Benutzerin/der Benutzer dieses Lernpfades möge den Induktionsbeweis zu dieser Formel als Übung selbst durchführen.