

Rechenregeln für Produkte

Im Umgang mit Produkten sind gewisse Regeln zu beachten.

1 Produkt gleicher Faktoren

Beim Produkt

$$\prod_{k=1}^n x$$

wird der Faktor x einfach k -mal multipliziert, da er keinen Multiplikationsindex besitzt, d.h.

$$\prod_{k=1}^n x = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n\text{-mal}}.$$

Ein Beispiel dazu:

Falls $n = 4$ und $x = 2$, dann gilt

$$\prod_{k=1}^n x = \prod_{k=1}^4 2 = 2 * 2 * 2 * 2 = 16.$$

2 Herausheben konstanter Faktoren

Seien x_1, x_2 und x_3 die Seitenlängen eines Würfels. Das Volumen dieses Würfels beträgt

$$x_1 * x_2 * x_3 = \prod_{k=1}^3 x_i$$

Falls zum Beispiel

$$x_1 = x_2 = x_3 = 5 \text{ (cm)}$$

(die Seitenlängen eines Würfels sind bekanntermaßen gleich lang) dann beträgt das Volumen

$$\prod_{k=1}^3 x_k = x_1 * x_2 * x_3 = 5 * 5 * 5 = 125 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Wenn man das Volumen eines Würfels mit doppelt so langen Seitenlängen ausrechnen will, dann beträgt es

$$\prod_{k=1}^3 2x_k = 2x_1 * 2x_2 * 2x_3 = 2 * 5 * 2 * 5 * 2 * 5 = 2 * 2 * 2 * 5 * 5 * 5 = 8 * 125 = 1000 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Wenn man den Term $8 * 125$ betrachtet, so erkennt man, dass das Volumen des ursprünglichen Würfels (125) mit 8 multipliziert wird um das Volumen des neuen Würfels zu berechnen. Das heisst, eine schnellerer Weg um das “neue“ Volumen auszurechnen ist, den konstanten Faktor 2 aus dem Produkt

$$\prod_{k=1}^3 2x_k$$

herauszuziehen. Das führt zu dem Produkt

$$2 * 2 * 2 * \prod_{k=1}^3 x_k = 2^3 * \prod_{k=1}^3 x_k \quad (= 8 * 125 = 1000 \text{ (cm}^2\text{)}).$$

Allgemein kann man also aus einem Produkt, in dem ein konstanter Faktor vorkommt, diesen aus dem Produkt herausheben:

$$\prod_{k=1}^n cx_k = c^n \prod_{k=1}^n x_k.$$

3 Aufspalten in Teilprodukte

Man kann ein Produkt in Teilprodukte aufspalten

$$\prod_{k=1}^n x_k = \prod_{k=1}^m x_k \prod_{k=m+1}^n x_k \quad (1 < m < n).$$

Dazu ein Beispiel: Falls $n = 4$ und $m = 2$, dann ist

$$\prod_{k=1}^n x_k = \prod_{k=1}^4 x_k = x_1 * x_2 * x_3 * x_4 = \prod_{k=1}^2 x_k \prod_{k=3}^4 x_k = \prod_{k=1}^m x_k \prod_{k=m+1}^n x_k$$

4 Produkt von Produkten

Da die Reihenfolge beim Multiplizieren beliebig ist, kann man ein Produkt auf folgende Art und Weise “aufspalten”:

$$\prod_{l=1}^n x_l y_l z_l = \prod_{l=1}^n x_l \prod_{l=1}^n y_l \prod_{l=1}^n z_l.$$

Dazu ein Beispiel:

$$\prod_{l=1}^2 x_l y_l z_l = x_1 * y_1 * z_1 * x_2 * y_2 * z_2 = x_1 * x_2 * y_1 * y_2 * z_1 * z_2 = \prod_{l=1}^2 x_l \prod_{l=1}^2 y_l \prod_{l=1}^2 z_l.$$