Rechenregeln für Matrizen

Multiplikation einer Matrix mit der Einheitsmatrix

Es gilt
$$\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$$

also die Multiplikation einer Matrix $\mathbf{A}$ mit der Einheitsmatrix ergibt wiederum $\mathbf{A}$.

Sei
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$
dann ist die Einheitsmatrix der gleichen Dimension
$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt:
$$\begin{aligned}
\mathbf{AE} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 * 1 + 5 * 0 & 2 * 0 + 5 * 1 \\ 1 * 1 + 7 * 0 & 1 * 0 + 7 * 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{A}
\end{aligned}$$
und
$$\begin{aligned}
\mathbf{EA} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 * 2 + 0 * 1 & 1 * 5 + 0 * 7 \\ 0 * 2 + 1 * 1 & 0 * 5 + 1 * 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Multiplikation einer Matrix mit der Nullmatrix

> Das Produkt einer quadratischen Matrix mit der Nullmatrix ergibt die Nullmatrix:
> $$\mathbf{A0} = \mathbf{0A} = \mathbf{0}.$$

Falls wiederum

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{A0} &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2*0+5*0 & 2*0+5*0 \\ 1*0+7*0 & 1*0+7*0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{0A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0*2+0*1 & 0*5+0*7 \\ 0*2+0*1 & 0*5+0*7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Transponieren einer Summe bzw. eines Produkts zweier Matrizen

Weiters gelten folgende Regeln:

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
2. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
3. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

Wenn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

dann ist

1.

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}+\mathbf{B})^T &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

also

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T.$$

2.

$$\begin{aligned} (\mathbf{AB})^T &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \right)^T \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 28 & 17 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 7 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 20 & 28 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

also

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

3. Schließlich wollen wir ein Beispiel für Regel 3 betrachten:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}^T)^T &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^T\right)^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.
\end{aligned}$$

Die Inverse eines Produktes von zwei Matrizen

Es gilt

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Auch hier ein Beispiel (mit den gleichen Matrizen wie vorher):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{AB})^{-1} &= \left(\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 20 & 7 \\ 28 & 17 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{20*17-28*7}\begin{pmatrix} 17 & -7 \\ -28 & 20 \end{pmatrix} = \frac{1}{144}\begin{pmatrix} 17 & -7 \\ -28 & 20 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{17}{144} & \frac{-7}{144} \\ \frac{-28}{144} & \frac{20}{144} \end{pmatrix} \\
\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}^{-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{0*3-4*(-4)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2*7-1*5} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{16*9} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{144} \begin{pmatrix} 17 & -7 \\ -28 & 20 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

also

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Potenzieren von Matrizen

$$\mathbf{A}^p = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}\ldots\mathbf{A}}_{p-mal}$$

- $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$
- $\mathbf{A}^{-p} = (\mathbf{A}^{-1})^p$
- $\mathbf{A}^{p+q} = \mathbf{A}^p\mathbf{A}^q$