Rechenoperationen mit Matrizen

<u>Addition und Subtraktion</u>

Man kann Matrizen addieren und subtrahieren wenn sie vom gleichen Typ sind, d.h. wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten gleich sind.

Die **Addition** von 2 Matrizen **A** und **B** ist

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,$$

also man summiert das Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix **A** mit dem Element in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix **B**.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 13 & 7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -8 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+7 & -5+10 \\ 13+(-8) & 7+1 \\ -6+0 & 4+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 5 & 8 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die **Subtraktion** von 2 Matrizen ist definiert durch

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{ij}) - (b_{ij}) \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n.$$

Zum Beispiel

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 13 & 7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -8 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -15 \\ 21 & 6 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl

Eine Matrix (vom Typ (m, n)) wird mit einer reellen Zahl c multipliziert, indem jedes Element der Matrix mit c multipliziert wird, d.h.

$$c\mathbf{A} = c(a_{ij}) = (ca_{ij}).$$

Ein Beispiel:

$$2\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 13 & 7 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2*2 & 2*(-5) \\ 2*13 & 2*7 \\ 2*(-6) & 2*4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ 26 & 14 \\ -12 & 8 \end{pmatrix}.$$

Es gelten folgende Gesetze:

- **Kommutativgesetz**: $c\mathbf{A}{=}\mathbf{A}c$
- **Assoziativgesetz**: $c(d\mathbf{A}){=}(cd)\mathbf{A}$
- **Distributivgesetz**:

$$\begin{aligned} (c+d)\mathbf{A} &= c\mathbf{A} + d\mathbf{A} \\ (c-d)\mathbf{A} &= c\mathbf{A} - d\mathbf{A} \\ c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B} \\ c(\mathbf{A}-\mathbf{B}) &= c\mathbf{A} - c\mathbf{B} \end{aligned}$$

Multiplikation zweier Matrizen

2 Matrizen (**A** und **B**) können multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von **A** gleich der Zeilenanzahl von **B** ist. Das Produkt von **A** und **B** ist ebenfalls eine Matrix, nennen wir sie **C**.

c_{ij}, also das Element in der Matrix **C**, welches man in der i-ten Zeile und j-ten Spalte findet, entsteht durch eine Multiplikation des i-ten Zeilenvektors von **A** mit dem j-ten Spaltenvektor von **B**.

Seien z.B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

Wenn man die 1.Zeile von **A**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

mit der 1.Spalte von **B**

$$\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix}$$

multiplizieren will, dann geschieht dies durch das sogenannte **Skalarprodukt**, welches folgendermaßen definiert ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} = c_{11}.$$

Das Produkt von 2 Matrizen ist also folgendermaßen definiert:

$$\underbrace{\mathbf{A}}_{m \text{ x } n} * \underbrace{\mathbf{B}}_{n \text{ x } k} = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}) = (c_{ik}) = \mathbf{C} \qquad i = 1, \ldots, m, \ k = 1, \ldots, p$$

d.h. die Anzahl der Spalten von **A** muss mit der Anzahl der Zeilen von **B** übereinstimmen. Das Produkt einer (m,n)-Matrix **A** mit einer (n,k)-Matrix **B** ergibt also eine (m,k)-Matrix **C**.

Es ergibt sich

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}.$$

Zu beachten ist dass **AB** nicht unbedingt gleich **BA** ist. Wenn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 1*2+4*5 & 1*(-7)+4*6 \\ 0*2+(-3)*5 & 0*(-7)+(-3)*6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 17 \\ -15 & -18 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 2*1+(-7)*0 & 2*4+(-7)*(-3) \\ 5*1+6*0 & 5*4+6*(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 29 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

also $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Der Rang einer Matrix

Wir wissen, dass man eine Matrix als eine Anordnung von Spaltenvektoren bzw. Zeilenvektoren sehen kann. Diese Vektoren können **linear abhängig** oder **linear unabhängig** sein.

- **Lineare Abhängigkeit** besteht dann, wenn ein Vektor ein Vielfaches eines anderen Vektors ist, z.B.:

  $$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  dann sind **a** und **b** linear abhängig, weil

  $$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\mathbf{b}$$

  In Worten: "**a** ist 0.5 mal **b**".

  Das heisst, es gibt eine reelle Zahl c (symbolisch $c \in R$), sodass c**a**=**b**.

- **Lineare Unabhängigkeit**: falls es **kein** $c \in R$ gibt, sodass

  $$c\mathbf{a} = \mathbf{b},$$

  dann sind die Vektoren **a** und **b** linear unabhängig.

  Wenn

  $$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$c\mathbf{a} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c*1 \\ c*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b}$$

d.h. $c\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ unabhängig davon wie man c wählt.

Eine Anmerkung: der Nullvektor nimmt eine "Sonderstellung" ein. Kein Vektor ist linear unabhängig vom Nullvektor, da jeder Vektor durch "Stauchung" mit dem Faktor 0 in den Nullvektor übergeführt werden kann.

Nun können wir den **Rang einer Matrix** definieren:

In einer Matrix $\mathbf{A}$ ist die größte Anzahl r der linear unabhängigen Spaltenvektoren stets gleich der größten Anzahl der linear unabhängigen Zeilenvektoren. Diese Zahl r wird als *Rang* der Matrix bezeichnet (symbolisch: r=Rg($\mathbf{A}$)).

Dazu ein paar Beispiele:

- Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten zuerst die Spalten der Matrix, also

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da zwischen einem Nullvektor und einem beliebigen anderen Vektor stets lineare Abhängigkeit besteht, haben wir einen linear unabhängigen Spaltenvektor.

Nun betrachten wir die Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ist unschwer zu erkennen, daß die beiden Vektoren ident sind

$$1 * \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \end{pmatrix},$$

d.h. wir haben lineare Abhängigkeit

Also haben wir auch hier einen linear unabhängigen (Zeilen-)Vektor.

Der Rang der Matrix $\mathbf{A}$ ist dementsprechend 1.

- Sei

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten wieder zuerst die Spalten, also

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Weil

$$3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

sind der erste und der dritte Spaltenvektor voneinander linear abhängig.
Der zweite Vektor,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig, da

$$c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(z.B. kann $c * 0$ nicht gleich 1 sein).

Analog ist

$$c \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Also haben wir zwei linear unabhängige Spaltenvektoren.

Nun betrachten wir die Zeilen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Es ist leicht zu erkennen, daß

$$2 * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

Der zweite und der dritte Zeilenvektor sind demnach linear abhängig.

Es gilt

$$c * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$c * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

also haben wir zwei linear unabhängige Zeilenvektoren.

Der Rang von **B** ist dementsprechend 2.