Die Matrix

> Eine Matrix ist ein rechteckiges Schema, dessen Elemente üblicherweise Zahlen, aber auch andere mathematische Elemente wie Variablen oder Funktionen sein können. Sie besteht aus m Zeilen und n Spalten.

Beispiel:

Eine Matrix (mit Namen **A**) mit 3 Zeilen und 3 Spalten ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sie besteht aus mehreren *Zeilen*:

$$\begin{array}{lccc} \text{1.Zeile}: & 1 & 4 & 3 \\ \\ \text{2.Zeile}: & 3 & 2 & 1 \\ \\ \text{3.Zeile}: & 2 & 2 & 4 \end{array}$$

Man bezeichnet die Zeilen einer Matrix auch als **Zeilenvektoren**.

Eine Matrix kann man auch als ein Konstrukt sehen, das aus **Spaltenvektoren** besteht, in unserem Fall

$$\begin{array}{rcrcrc} & 1 & & 4 & & 2 \\ \text{1.Spalte}: & 3 & \text{2.Spalte}: & 2 & \text{3.Spalte}: & 1 \\ & 2 & & 2 & & 4 \end{array}$$

Allgemeine Definition:

Allgemein bezeichnet man eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten als (m x n)-Matrix bzw. vom Typ (m, n). Man schreibt

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{A}}_{(m \text{ x } n)} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}}$$

d.h. die Elemente einer Matrix vom Typ (m, n) mit Namen $\boldsymbol{A}$ sind a_{ij} wobei $i = 1, \dots, m$ und $j = 1, \dots, n$.
a_{ij} ist der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix . Zum Beispiel ist a_{21} das Element der 2. Zeile und 1. Spalte.

i wird auch der **Zeilenindex**, j der **Spaltenindex** genannt.

Spezielle Formen einer Matrix

Eine Matrix, die nur aus einer Zeile besteht, wird **Zeilenmatrix** genannt (d.h. sie ist vom Typ (1,n)), also

$$A = \quad (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}).$$

Eine **Spaltenmatrix** ist eine Matrix, die nur aus einer Spalte besteht (d.h. sie ist vom Typ (m,1)), z.B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Nullmatrix wird eine Matrix genannt, bei der sämtliche Elemente gleich Null sind:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Eine **transponierte Matrix** entsteht, indem man die Zeilen und Spalten einer Matrix vertauscht. Sei z.B.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die transponierte Matrix $\boldsymbol{A}^T$ ist dann

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. die 1. Zeile der Matrix $\boldsymbol{A}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

wird zur 1. Spalte der Matrix $\boldsymbol{A}^T$

$$\begin{pmatrix} 2 & \dots \\ 1 & \dots \\ 4 & \dots \end{pmatrix}.$$

Ein paar Anmerkungen:

- Wenn man eine Matrix **zweimal** transponiert, wird sie wieder zur ursprünglichen Matrix, d.h.

  $$(\boldsymbol{A}^T)^T = \boldsymbol{A}$$

- Ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ vom Typ (m,n), so ist $\boldsymbol{A}^T$ vom Typ (n,m)

- Die Elemente der Matrix $\boldsymbol{A}$ und der Matrix $\boldsymbol{A}^T$ stehen in folgendem Zusammenhang:

  $$a_{ij}^T = a_{ji}$$

  z.B. ein Element, das in der Matrix $\boldsymbol{A}$ in der 3. Zeile und 4. Spalte steht, (a_{34}), findet sich in der Matrix $\boldsymbol{A}^T$ in der 4. Zeile und 3. Spalte, (a_{43}).