Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen

Das Eigenwertproblem

Sei $\mathbf{A}$ eine quadratische Matrix vom Typ (m,m). Die Aufgabe, eine Zahl λ und einen dazugehörigen Vektor $\mathbf{x}$ ($\neq \mathbf{0}$) zu finden, damit

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

ist, nennt man **Eigenwertproblem**.

- Die Zahl λ heißt **Eigenwert**, wobei λ eine komplexe oder eine reelle Zahl ist
- Der Vektor $\mathbf{x}$ heißt **Eigenvektor**, wobei auch $c\mathbf{x}$ (c ist eine beliebige reelle Zahl ungleich 0) ein Eigenvektor ist. $\mathbf{x}$ darf definitionsgemäss nicht gleich dem Nullvektor sein.

Die Gleichung

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

kann man folgendermassen umformen:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{x} - \lambda \underbrace{\mathbf{x}}_{=\mathbf{E}\mathbf{x}} = \mathbf{0} \\ &\Longleftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{x} = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Ein paar Anmerkungen:

- Falls die Matrix **symmetrisch** ist, sind ihre Eigenwerte reell
- Falls die Matrix **positiv definit** ist, sind ihre Eigenwerte > 0.
  Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist positiv definit, falls

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \qquad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

- Falls die Matrix **positiv semidefinit** ist, sind ihre Eigenwerte ≥ 0. Eine Matrix $\mathbf{A}$ ist positiv semidefinit, falls

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Das charakteristische Polynom

Die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$ sind nun die Lösungen folgender Gleichung:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \mathbf{0}$$

wobei

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} - \lambda \end{vmatrix} = P_n(\lambda)$$

d.h. $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ ist ein Polynom n-ten Grades mit Variable λ (symbolisch $P_n(\lambda)$).

Das Polynom $P_n(\lambda)$ nennt man **charakteristisches Polynom**.

Ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (2-\lambda)*(1-\lambda)*(-4-\lambda) + (-3)*3*(-5) + 1*3*2 \\
&\quad -(-5)*(1-\lambda)*1 - 2*3*(2-\lambda) - (-4-\lambda)*3*(-3) \\
&= (2-\lambda-2\lambda+\lambda^2)*(-4-\lambda) + 45 + 6
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +5*(1-\lambda)-6*(2-\lambda)+9*(-4-\lambda) \\
= \; & (2-3\lambda+\lambda^2)*(-4-\lambda)+51+5-5\lambda-12+6\lambda-36-9\lambda \\
= \; & -8+12\lambda-4\lambda^2-2\lambda+3\lambda^2-\lambda^3+8-8\lambda \\
= \; & \underbrace{-\lambda^3-\lambda^2+2\lambda}_{\text{Char. Polynom}}=0
\end{aligned}
$$

Die Eigenwerte

Die Lösungen der Gleichung

$$-\lambda^3-\lambda^2+2\lambda=0$$

berechnet man folgendermaßen:

Zuerst kann man $-\lambda$ herausheben:

$$-\lambda^3-\lambda^2+2\lambda=-\lambda(\lambda^2+\lambda-2).$$

$\lambda^2+\lambda-2$ lässt sich darstellen als

$$(\lambda-1)(\lambda+2) \quad \underbrace{(=\lambda*\lambda-1\lambda+2\lambda-2=\lambda^2+\lambda-2)}_{\text{Probe}}$$

also

$$-\lambda^3-\lambda^2+2\lambda=-\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)=0.$$

Das heisst

$$-\lambda^3-\lambda^2+2\lambda=-\lambda(\lambda-1)(\lambda+2)=0$$

ist genau dann erfüllt, wenn λ gleich $0, 1$ oder -2 ist.

$\underline{\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=-2}$ sind die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

Die Eigenwerte sind als die Lösungen der Gleichung

$$P_n(\lambda)=0.$$

Die Eigenvektoren

> Der zu einem Eigenwert λ_i gehörende Eigenvektor $\mathbf{x}_i$ ist die Lösung der Gleichung
> $$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})\mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Nun wollen wir die 3 Eigenvektoren der Matrix $\mathbf{A}$ bestimmen:

- $\lambda_1 = 0$: Der 1.Eigenvektor ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$(\mathbf{A} - 0\mathbf{E})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

Der nächste Schritt ist das Ausmultiplizieren der Matrizen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\ \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d.h. folgendes Gleichungssystem muss gelöst werden:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass eine Lösung dieses Systems

$$x_1 = 10, x_2 = 3, x_x = -11$$

ist.

D.h. unser 1.Eigenvektor ist:

$$c \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_2 = 1$: Der 2.Eigenvektor ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$(\mathbf{A} - 1\mathbf{E})\mathbf{x}_1 \;=\; \mathbf{0}$$

also

$$\begin{aligned}
\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\
\begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 3 & 1-1 & 3 \\ -5 & 2 & -4-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\
\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -5 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \mathbf{0} \\
\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 0x_2 + 3x_3 \\ -5x_1 + 2x_2 - 5x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Erneut ist ein Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned}
x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\
3x_1 \quad + \quad 3x_3 &= 0 \\
-5x_1 + 2x_2 - 5x_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass eine Lösung dieses Systems

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

ist.

D.h. unser 2.Eigenvektor ist:

$$c\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_3 = -2$: Der 3.Eigenvektor ergibt sich aus folgender Gleichung:

$$(\mathbf{A} - (-2)\mathbf{E})\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-(-2) & -3 & 1 \\ 3 & 1-(-2) & 3 \\ -5 & 2 & -4-(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ -5x_1 + 2x_2 - 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Eine Lösung dieses Systems ist

$$x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = -7.$$

Der 3.Eigenvektor ist demnach

$$c \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte und Eigenvektoren mehrfacher Nullstellen

Ist λ_i ein n-facher Eigenwert und hat die Matrix $(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{E})$ den Rang r_i, dann ist die Zahl der linear unabhängigen Eigenvektoren, die zu λ_i gehören, gleich $n - r_i$.

Im Laufe des Studiums begegnet man häufig symmetrischen Matrizen (z.B. Varianz-Kovarianz Matrizen, Korrelationsmatrizen). Diese haben die Eigenschaft, dass zu jedem k-fachen Eigenwert $\lambda = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k$ genau k linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ existieren.

Sei z.B.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das charakteristische Polynom dieser Matrix ist

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda) - 0 * 0 \\ &= (2-\lambda)(2-\lambda). \end{aligned}$$

Die Lösung von

$$(2-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

ist $\lambda = 2$, d.h. 2 ist eine *zweifache* Lösung des Gleichungssystems. Die Eigenwerte sind dementsprechend

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,$$

also ist 2 ist ein *zweifacher* Eigenwert.

Da $\mathbf{B}$ eine symmetrische Matrix ist, existieren zu

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

2 linear unabhängige Eigenvektoren.

Zur Bestimmung der Eigenvektoren zu $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ist folgende Gleichung zu lösen:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

also

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d.h. es ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$0x_1 + 0x_2 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

2 linear unabhängige Lösungsvektoren sind etwa:

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dass diese beiden Vektoren das Gleichungssystem lösen, kann man durch Einsetzen überprüfen, z.B.

$$0x_1 + 0x_2 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 = 0$$

für

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist

$$\begin{aligned} 0 * 1 + 0 * 0 &= 0 \\ 0 * 0 + 0 * 1 &= 0 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

d.h. wir haben gezeigt, dass

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

tatsächlich ein Lösungsvektor ist. Die Vorgangsweise für den 2.Lösungsvektor ist analog.

Die lineare Unabhängigkeit von

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist am einfachsten daran zu erkennen, dass

$$c_1 * 1 = c_2 * 0$$

nicht lösbar ist, ausser $c_1 = 0$, was aber wegen der Definition für die Existenz von Eigenvektoren augeschlossen wurde (der Nullvektor kann kein Eigenvektor sein).