Determinanten

Definition

Eine **Determinante** ist eine **Zahl**, die einer quadratischen Matrix zugeordnet ist.

D.h. wenn man eine quadratische Matrix betrachtet, die aus Zahlen besteht, z.B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

dann hat sie eine eindeutig bestimmte **Determinante** (symbolisch: "det **A**" oder |A|), deren Berechnung im folgenden erklärt wird.

Man kann die Determinante von jeder allgemeinen Matrix $\mathbf{A}=(a_{ij})$ vom Typ (m, m) bestimmen

Zuerst wollen wir die Berechnung der Determinanten von 2**x**2 bzw. 3**x**3 Matrizen besprechen.

Die Determinante von 2x2 Matrizen

Wenn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

dann ist

$$\det \mathbf{A} = \mid \mathbf{A} \mid = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Rightarrow a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Ein Beispiel: Wenn

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

dann ist die Determinante von **A**:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 * (-2) - 3 * 5 = -8 - 15 = \underline{-23}.$$

2 Bemerkungen:

- Für nichtquadratische Matrizen ist die Determinante nicht definiert.
- Die Determinante ist eindeutig, d.h. jeder quadratischen Matrix wird genau eine Determinante (Zahl) zugeordnet.

<u>Die Determinante von 3x3 Matrizen</u>

Die Determinante einer 3**x**3 Matrix ist

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = \mid \mathbf{A} \mid &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad -a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}. \end{aligned}$$

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 4 * (-2) * 1 + 5 * 1 * 0 + 3 * 3 * 3 \\ &\quad -0 * (-2) * 3 - 3 * 1 * 4 - 1 * 3 * 5 \\ &= -8 + 0 + 27 - 0 - 12 - 15 = \underline{-8} \end{aligned}$$

also ist die Determinante von **A** gleich -8.

Die Determinante von mxm Matrizen

Nun wollen wir eine Definition der Determinante für Matrizen vom Typ (m,m) definieren:

$$\det \underbrace{\mathbf{A}}_{mxm} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{vmatrix}.$$

Die Vorgangsweise ist folgende: Man wählt eine Zeile oder Spalte einer Matrix, in der möglichst viele Nullen stehen. Sei z.B.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 8 \\ -1 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

dann sind die meisten Nullen in der 2.Spalte:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Jede andere Zeile bzw. Spalte der Matrix enthält weniger als 2 Nullen.

Nun betrachtet man das 1. Element dieses Vektors (man nennt es "1. Pivotelement"), welches in der 2.Spalte und 1.Zeile der Matrix steht (durch Fettschrift markiert):

$$\begin{pmatrix} 3 & \mathbf{0} & 7 & 8 \\ -1 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 3 & -10 \end{pmatrix}.$$

Jetzt 'streicht' man die Zeile und Spalte in der sich das Pivotelement befindet. Übrig bleibt folgende Matrix:

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & -10 \end{pmatrix},$$

d.h. $\mathbf{A}_{12}$ ist diejenige Matrix, die durch Streichen der 1.Zeile und 2.Spalte der Matrix $\mathbf{A}$ entsteht.

Diese Vorgangsweise wiederholt man für alle anderen Elemente des Vektors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Der nächste Schritt ist also, das 2.Element dieses Vektors (das 2.Pivotelement) in der Matrix $\mathbf{A}$ zu markieren:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 7 & 8 \\ -1 & -\mathbf{5} & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 3 & -10 \end{pmatrix},$$

Wiederum ist die Zeile und Spalte zu streichen in der dieses Pivotelement steht, wodurch man die Matrix

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & -10 \end{pmatrix}$$

erhält.

Auf die gleiche Art und Weise bekommt man $\mathbf{A}_{32}$ und $\mathbf{A}_{42}$.

Nun kehren wir zur Grundaufgabe zurück, der Berechnung von

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 8 \\ -1 & -5 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & 12 \\ -2 & 4 & 3 & -10 \end{vmatrix}$$

Die Determinante berechnet sich jetzt durch

$$\det\mathbf{A} = \overbrace{\underbrace{0}_{\text{1.Pivotel.}} * \det\mathbf{A}_{12} * (-1)^{1+2}}^{=0} + \underbrace{(-5)}_{\text{2.Pivotel.}} * \det\mathbf{A}_{22} * \overbrace{(-1)^{2+2}}^{=1}$$

$$+ \overbrace{\underbrace{0}_{\text{3.Pivotel.}} * \det\mathbf{A}_{32} * (-1)^{3+2}}^{=0} + \underbrace{4}_{\text{4.Pivotel.}} * \det\mathbf{A}_{42} * \overbrace{(-1)^{4+2}}^{=1}$$

$$= (-5) * \begin{vmatrix} 3 & 7 & 8 \\ 6 & 3 & 12 \\ -2 & 3 & -10 \end{vmatrix} + 4 * \begin{vmatrix} 3 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & -1 \\ 6 & 3 & 12 \end{vmatrix}$$

wobei wir die Regel für die Berechnung von 3x3 Matrizen bereits kennen.

Die Strategie bei der Berechnung der Determinante einer mxm Matrix ($m > 3$) ist also die Entwicklung nach einer Spalte bzw. Zeile, um die Dimension der Matrix, deren Determinante man berechnen soll, sozusagen Schritt für Schritt zu "reduzieren".

Eine allgemeine, rekursive Formel für die Determinante einer Matrix ist:

$$\det\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{a_{ij}}_{\text{Pivotel.}} \mathbf{A}_{ij}(-1)^{i+j} \qquad \text{Entwicklung nach der } j\text{-ten Spalte}$$

$$\det\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{m} \underbrace{a_{ij}}_{\text{Pivotel.}} \mathbf{A}_{ij}(-1)^{i+j} \qquad \text{Entwicklung nach der } i\text{-ten Zeile.}$$

Anmerkungen

- Der Wert einer Determinante ist unabhängig von der Auswahl der Entwicklungszeile/-spalte
- Eine Determinante ist gleich Null, wenn
  - eine Zeile/Spalte aus lauter Nullen besteht
  - zwei Zeilen/Spalten gleich sind
  - eine Zeile/Spalte eine Linearkombination anderer Zeilen/Spalten ist
- Es gilt: $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$
- Bei Vertauschung zweier Zahlen ändert sich das Vorzeichen der Determinante

- Falls α eine Zahl ist und $\mathbf{A}$ vom Typ (m,m), dann gilt:

$$\det(\alpha\mathbf{A}) = \alpha^m \det\mathbf{A}$$

Die Inverse einer Matrix

Zu einer mxm Matrix $\mathbf{A}$, die Rang m besitzt, gibt es immer eine *inverse* Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ sodass gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$$

d.h. die Multiplikation einer Matrix $\mathbf{A}$ mit ihrer Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ ergibt die Einheitsmatrix $\mathbf{E}$.

Die Inverse einer 2x2 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ist:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Wie man die Inverse einer mxm Matrix für $m > 2$ berechnet, wird an dieser Stelle nicht erklärt, da es für das Studium nicht von Relevanz ist.

Sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dann ist die Inverse

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2*1-1*0} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} + 0*(-\frac{1}{2}) & 2*0+0*1 \\ 1*\frac{1}{2} + 1*(-\frac{1}{2}) & 1*0+1*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$