Der binomische Lehrsatz

Eine der bekanntesten Formeln in der Mathematik ist

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Im Grunde ist dies nur ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes, des *binomischen Lehrsatzes*.

Wenn man nämlich höhere Potenzen ausrechnen will, z.B.

$$(a+b)^3$$

oder

$$(a+b)^4$$

wird der Rechenaufwand sehr groß, wenn man einfach ausmultipliziert. Letzterer Term ausmultipliziert ergibt etwa

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

Man erkennt, wie kompliziert das Ausmultiplizieren wird. Deswegen versuchen wir eine allgemeine Formel für

$$(a+b)^n$$

zu ermitteln.

Es gilt

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) * (a+b) * \ldots * (a+b)}_{n-mal}$$

Wenn man alle Klammern ausmultipliziert, bekommt man eine Reihe von Termen, die wir Schritt für Schritt bestimmen. Beim Ausmultiplizieren wird **1** Faktor der 1. Klammer mit je **1** Faktor aller anderen Klammern multipliziert (dabei werden alle möglichen Kombinationen durchlaufen), und dann wird aufsummiert.

Wenn man dies bei

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) * (a+b) \ldots * (a+b)}_{n-mal}$$

macht, ergibt das

$$\begin{aligned}\underbrace{(a+b)*(a+b)\ldots*(a+b)}_{n-mal} &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + \ldots + \\ &\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}a^{n-m}b^m + \ldots + \\ &\quad + nab^{n-1} + b^n.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Terme $a^{n-k}b^k$ sind

$$1, n, \frac{n(n-1)}{2!}, \ldots, \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \ldots, \frac{n(n-1)}{2!}, n, 1$$

welche man auch auf folgende Weise anschreiben kann

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{2}, \binom{n}{1}, \binom{n}{0}$$

was gleich

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{k}, \ldots, \binom{n}{n-2}, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$$

ist.

Also gilt

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

bzw.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad \textbf{Binomischer Lehrsatz}$$