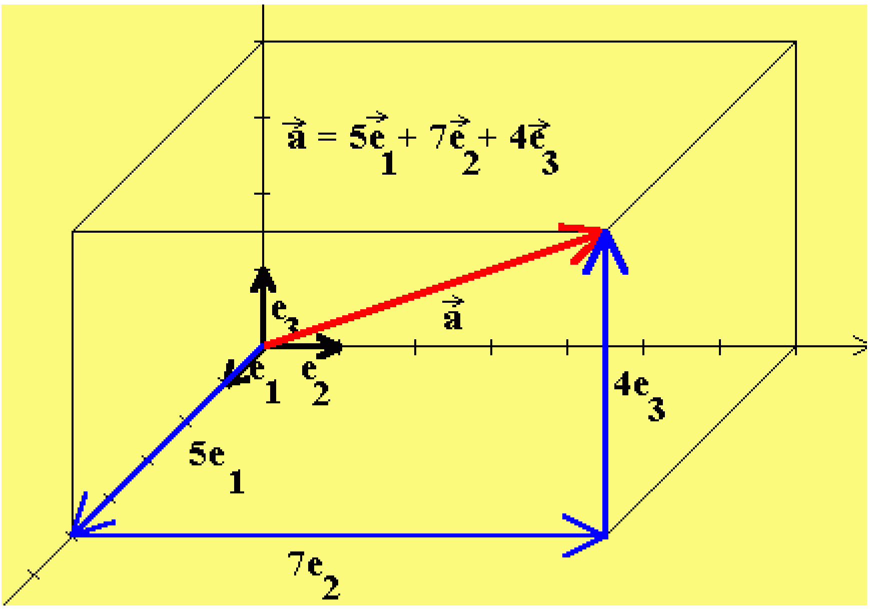
Lösungen zum Test

VORÜBUNG:



1. AUFGABE:

Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn ein Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors ist.
Repräsentanten (die Pfeile) sind dann parallel.
Ist der Nullvektor unter den beiden Vektoren, so sind sie linear abhängig.

```
          |-1|        | 2|
   ->     |  |   ->   |  |   Linear abhängig
a) a   =  | 2|   b  = |-4|
          |  |        |  |   ->      ->
          |-1|        | 2|   b = -2·a


          | 6|        |-9|  Linear abhängig
   ->     |  |   ->   |  |
b) u   =  |-4|   v  = | 6|  ->     3 ->
          |  |        |  |  v = -  --·u
          | 2|        |-3|         2

  Oder: Man sieht sofort: Beide Vektoren sind

                                    | 3|
                                    |  |
  ein Vielfaches des Vektors        |-2|.
                                    |  |
                                    | 1|

       |4|       |8|   Linear unabhängig. Wäre
   ->  | |   ->  | |
c) p = |3|   q = |6|   der zweite das Doppelte
       | |       | |
```

|2| |3| des ersten, müsste seine

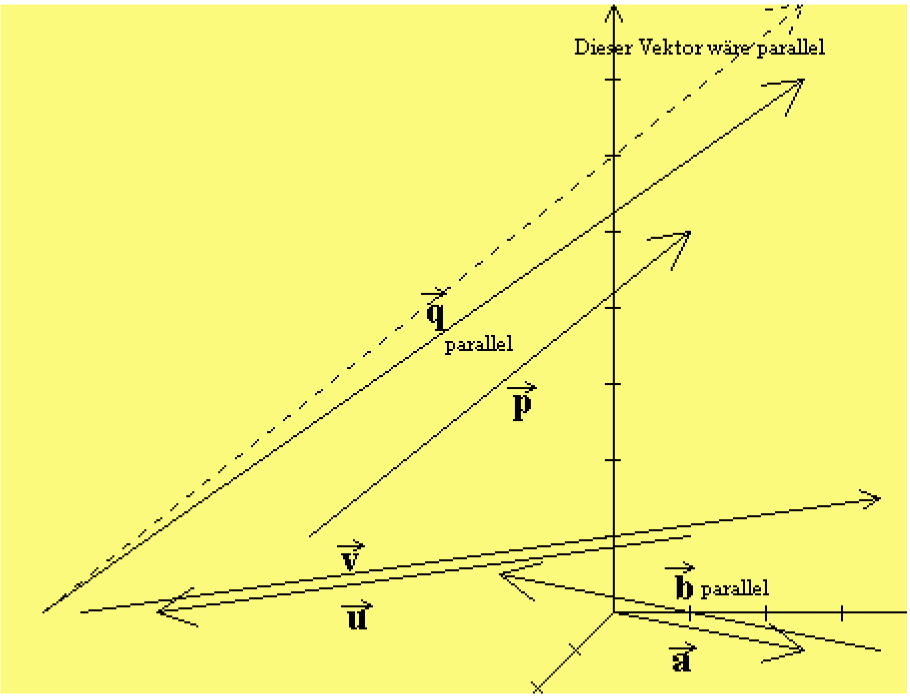
3. Koordinate 4 sein.

Formal gerechnet: Der Ansatz

$\vec{q} = k \cdot \vec{p}$ führt auf das LGS $\begin{vmatrix} 8 = 4k \\ 6 = 3k \\ 3 = 2k \end{vmatrix}$,

der keine Lösung hat (Es kann nicht gleichzeitig

k =2 und k = 1,5 sein.



2. AUFGABE:

Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$x * \vec{a} + y * \vec{b} + z * \vec{c} = 0$$

nur die **triviale Lösung** x=0, y=0 und z=0 hat.

a) $\vec{a} = \begin{vmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\vec{b} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ $\vec{c} = \begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix}$

Hier hat man das LGS zu lösen $\left| \begin{aligned} y + 2z &= 0 \\ -6x + y - 4z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} &(1) \\ &(2). \\ &(3) \end{aligned}$

Dieses LGS ist äquivalent zu $\left| \begin{aligned} y + 2z &= 0 \\ -6x + y - 4z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right| \begin{aligned} &(1) \\ &(2) \\ &(1) - (3) \end{aligned}$

und hat folgende Lösung: z beliebig, y = - 2z und x = -z.

Zum Beispiel ist z = 1, y = -2 und x = -1 eine nicht triviale Lösung.

Also sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear abhängig.

Bemerkung:
Die Gleichung $-\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = 0$ kann zum Beispiel nach c aufgelöst werden:
$\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.

Deshalb liest man öfters auch folgende Definition:

Drei Vektoren sind linear abhängig, wenn einer dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen dargestellt werden kann.

Beim Beispiel $\vec{a} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$, $\vec{b} = \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ kann $\vec{c}$ allerdings

nicht als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt werden, wohl aber $\vec{b}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{c}$:

b = 2a + 0c .

Auch diese drei Vektoren sind linear abhängig:

Die Gleichung $x * \vec{a} + y * \vec{b} + z * \vec{c} = 0$ hat die nicht triviale Lösung:

x = 2; y = -1 und z = 0.

b) $\vec{u} = \begin{vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{vmatrix} \quad \vec{w} = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$

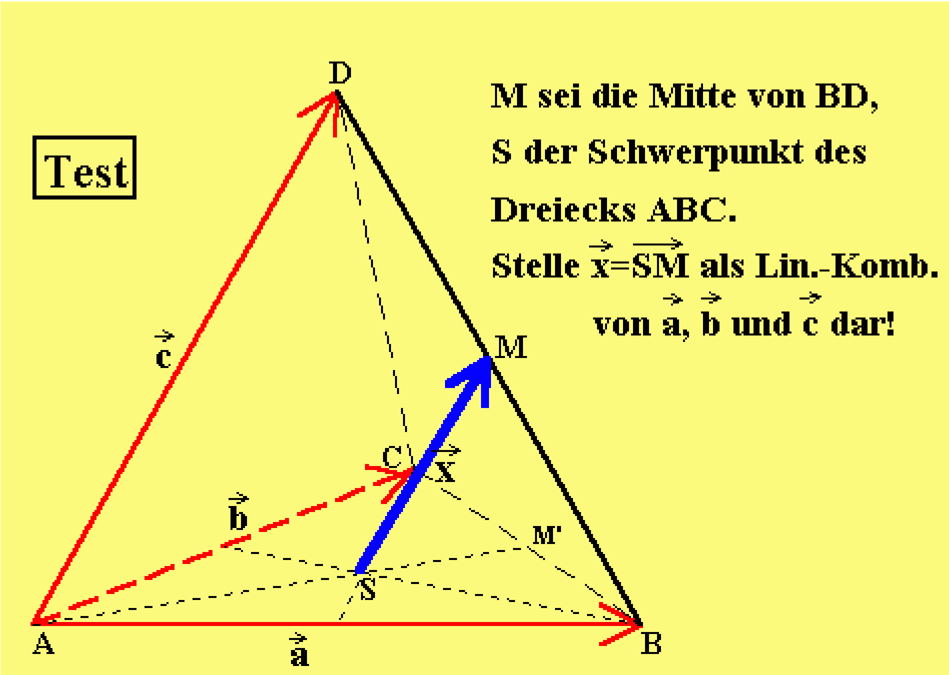
Hier hat man das LGS zu lösen $\left| \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2). \\ (3) \end{array}$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3')=(3)-2(1) \end{array} \quad \Leftrightarrow \left| \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 0 \\ -x & & & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \\ \\ (3') + (2) \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem hat offensichtlich nur die triviale Lösung

x = 0, y = 0 und z = 0. Die Vektoren sind also linear unabhängig.

3. AUFGBAE:



Lösung:

$\vec{x} = \overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ nach Definition der Addition von Vektoren.

Zwischenrechnung:

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{c}).$

$\overrightarrow{SA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AM'}$ für M'=Mitte von AC.

Der Schwerpunkt teilt ja die Schwerelinie im Verhältnis AS:SM' = 2:1. (AM' hat also 3 Teile.)

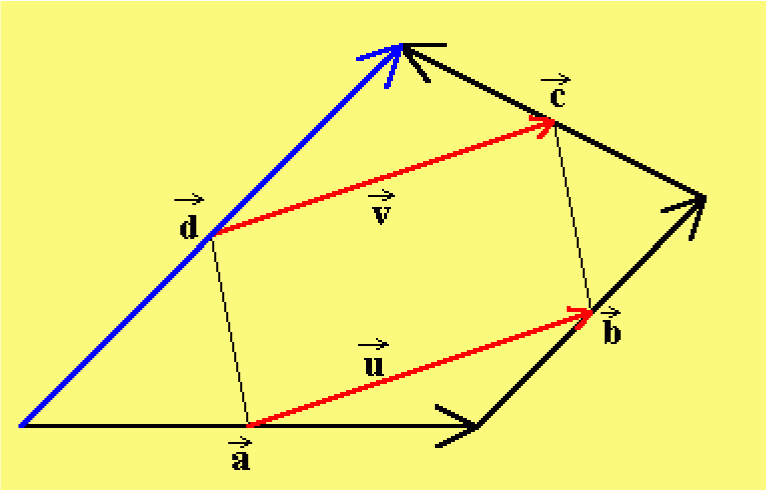
$\overrightarrow{AM'} = \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$

Somit ergibt sich:

$\vec{x} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{a} + \frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{c})$

$= \underline{\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}}.$

4. AUFGBAE:



a) $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. Mit $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ folgt

$$\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$. Man sieht $\vec{u} = \vec{v}$

b) Mit $\vec{u} = \vec{v}$ wurde gezeigt, dass bei dem durch Verbinden der Seitenmitten entstandenem Viereck zwei Gegenseiten gleich lang und parallel sind.

Es ist somit ein Parallelogramm.