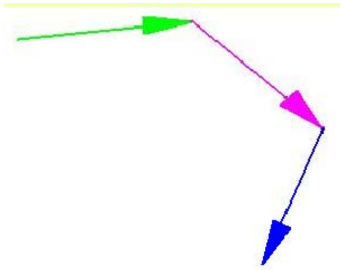

Lösung zum Übungsblatt: Gerade und Ebene

3. AUFGABE: ***Schnittgerade zweier Ebenen***

Sind die beiden Ebenen in Koordinatenform gegeben (und dafür werden wir stets sorgen), dann sind alle Punkte gesucht, welche die beiden Ebenengleichungen erfüllen. Wir müssen also ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten lösen. Im allgemeinen Fall gibt es dann unendlich viele Lösungen, die wir mit Hilfe eines Parameters t darstellen können. Wir erhalten dadurch die Parameterform der Geradengleichung.

a) I. $E_1 : 2x + 11y + 4z = 1$
II. $E_2 : x + 6y + z = 4$

Wir suchen also die Lösungsmenge der Gleichungen I. und II.

2·II.-I.

$y - 2z = 7$

Wir können eine Variable frei wählen. Zum Beispiel $z = t$.

Dann ergibt sich: $y = 7 + 2t$ und $x = -38 - 13t$.

Somit: Schnittgerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -38 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Falls Du eine andere Lösung erhalten hast, kann die anders aussehen.

Überprüfe, ob Dein Richtungsvektor ein Vielfaches von $\begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist

und dein Aufpunkt von g beide Ebenengleichungen erfüllt.

Mit Hilfe des Vektorproduktes kannst Du Deine Lösung überprüfen: Der Richtungsvektor der Schnittgeraden muss ein Vielfaches des Vektorproduktes der Normalvektoren sein, da der Richtungsvektor auf beiden Normalvektoren senkrecht steht.

Probe: $\begin{pmatrix} 2 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 - 24 \\ 4 - 2 \\ 12 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ stimmt!

b) I. E_1 : $2x - 2y + z = 1$
II. E_2 : $-2x + 2y + z = 4$

Man erkennt sofort, dass die Normalvektoren

$\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ der Ebenen linear abhängig sind.

Die Ebenen sind also parallel oder identisch.

Die Lösungsmenge des zugehörigen Linearen Gleichungssystems ist leer.
(Keine Lösung der ersten Gleichung kann Lösung der zweiten Gleichung sein!)
Die beiden Ebenen haben also keine gemeinsamen Punkte.
Die Ebenen sind parallel und nicht identisch.

c) Wir ermitteln zunächst die Koordinatengleichungen.
I. E_1 : $-2x + 11y + 5z = 23$
II. E_2 : $- x + 2x + 3x = -8$

mit der Zwischenrechnung
I. $- 2\cdot$II. erhalten wir:
$7y - z = 39$

setzen wir $y = t$
erhalten wir: $z = - 39 + 7t$ und $x = - 109 + 23t$.

Somit ist die Schnittgerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -109 \\ 0 \\ -39 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

oder mit einfacheren Aufpunkt ($t = 5$):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}.$$