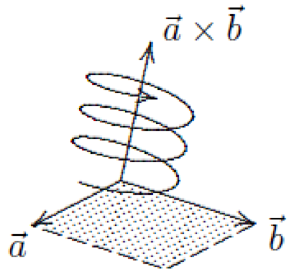
Das Kreuzprodukt

1) Definition

Zu zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erhält man mittels Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ einen Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, der normal auf die Ebene steht, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Der Betrag dieses Vektors $\vec{c}$ ist gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Ein Vektor, der auf einer Ebene normal steht heißt **Normalvektor**.



2) Wie berechnet man das Kreuzprodukt?

Um mit **Vektorprodukten** rechnen zu können muss man wissen:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 * b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 * b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 * b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 * b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 * b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 * b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

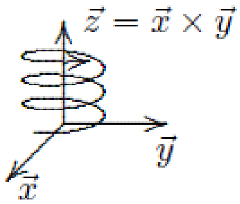
Anmerkung: Möchte man die <u>erste</u> Komponente des Vektors $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ berechnen, so geht man folgendermaßen vor: man denkt sich die <u>erste Zeile</u> von $\vec{a} \times \vec{b}$ <u>weg</u> und subtrahiert vom Produkt aus zweiter Komponente von $\vec{a}$ und dritter Komponente von $\vec{b}$, also $a_2 * b_3$, das Produkt aus zweiter Komponente von $\vec{b}$ und dritter Komponente von $\vec{a}$, also $a_3 * b_2$, und erhält $a_2 * b_3 - a_3 b_2$.
Für die anderen beiden Komponenten von $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ geht man gleich vor. **Achtung:** in der zweiten Zeile muss man mit (-1) multiplizieren.

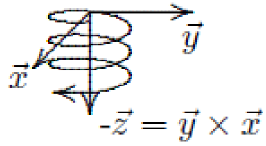
Merkregel:

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_1} \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cancel{b_1} \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ \cancel{a_2} \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \cancel{b_2} \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ \\ \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cancel{a_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cancel{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt:

- Es gilt genau dann $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel (kollinear) sind.
- $\vec{a}, \vec{b}\ und\ \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.
- $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
  $\Leftrightarrow$ Kommutativgesetzt gilt nicht: $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$
  Assoziativgesetz gilt nicht: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $\vec{a} \times (\lambda * \vec{b}) = \lambda * (\vec{a} \times \vec{b})$





Beispiel: Wie finden wir einen Vektor $\vec{n}$, der auf den Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$ senkrecht steht? $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 * b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 * b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 * b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-8) * 1 - (-7) * 2 \\ 2 * 2 - 1 * 1 \\ 1 * (-7) - 2 * (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$