Funktionen

© 2004 by Claudia Steinwender <csteinwender@hotmail.com>

Definition einer Funktion

Eine Zuordnung f, die jedem x *genau ein* y zuweist, heißt Funktion: y = f(x)

Definition.
Seien X,Y Mengen.
f heißt *Funktion* von X nach Y, wenn $\forall x \in X: \exists! y \in Y$ mit y = f(x)
X heißt *Definitionsmenge*, Y heißt *Zielmenge*
Man schreibt:
- f:X $\to$ Y, wobei x # f(x) oder
- f:X $\to$ Y, wobei f(x)=...

Bild (Image) einer Menge A $\subseteq$ X: $f(A) = \{y \in Y: \exists x \in A \text{ mit } f(x)=y\}$
Urbild einer Menge B $\subseteq$ Y: $f^{-1}(B) = \{x \in X: f(x) \in B\}$

Eigenschaften von Funktionen

■ injektiv

Eine Funktion ist injektiv, wenn jedes y maximal einem x zugewiesen wird.

Definition: f heißt injektiv $\Leftrightarrow x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

■ surjektiv

Eine Funktion ist surjektiv, wenn alle Werte der Zielmenge auch angenommen werden, dh. wenn das Bild/Image der Funktion der Zielmenge entspricht.

Definition: f heißt surjektiv $\Leftrightarrow$ Im(f) = Y

■ bijektiv

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.
Eine bijektive Funktion ist *umkehrbar*, dh. ihre inverse Funktion existiert.

■ Monotonie

Je nachdem ob der Graph der Funktion steigt oder fällt, nennt man die Funktion monoton fallend oder monoton steigend.

$x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$	f ist streng monoton steigend
$x<y \Rightarrow f(x)\leq f(y)$	f ist monoton steigend
$x<y \Rightarrow f(x)=f(y)$	f ist konstant
$x<y \Rightarrow f(x)\geq f(y)$	f ist monoton fallend
$x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$	f ist streng monoton fallend

Verknüpfung von Funktionen

Definition: Seien f und g zwei Funktionen. $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$
Dann ist $g \circ f$ die Verknüpfung der beiden Funktionen von $X \to Z$:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Elementare Funktionen

■ Lineare Funktion

Definition: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $f(x) = kx + d$, wobei $k,d \in \mathbb{R}$ heißt lineare Funktion

■ Signumfunktion (Vorzeichenfunktion)

Definition : $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1; 0; 1\}$ wobei $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}$

■ Betragsfunktion

Definition : $|x| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$ wobei $|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$

■ Potenzfunktion

Def . : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = x^r$, $r \in \mathbb{Z}$, heißt Potenzfunktion

■ Wurzelfunktion

Die Umkehrfunktion der Potenzfunktion ist die Wurzelfunktion

Def . : $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, heißt Wurzelfunktion

■ Exponentialfunktion

Def . : ${}^a\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = a^x$,
$a \in \mathbb{R}^+$, heißt Exponentialfunktion

■ Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist die Logarithmusfunktion

Def . : ${}^a\log : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ mit der Funktionsgleichung $y = {}^a\log x$,
$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, heißt Logarithmusfunktion