Zweifache Varianzanalyse

Man kann mittels VA auch den (gleichzeitigen) Einfluss mehrerer Faktoren (unabhängige Variablen) auf ein bestimmtes Merkmal (abhängige Variable) analysieren. Die Wirkungen werden in Haupteffekte und Wechselwirkungen eingeteilt.

Die zweifache (auch: zweifaktorielle) Varianzanalyse ist vom Prinzip her eine Erweiterung der einfachen VA für abhängige Stichproben, wobei statt *Vpn* und *Bedingungen* nun allgemeiner verschiedene Stufen von *Faktor A* und *Faktor B* unterschieden werden.

Unterschied zur einfachen VA abhängig

Die *Varianz Innerhalb* (bei der abhängigen VA auch als „Rest-Varianz“ bezeichnet) wird aufgespalten:

Man geht davon aus, dass die Faktoren nicht nur direkt auf das beobachtete Merkmal wirken, sondern dass auch Wechselwirkungen bestehen. In den beiden Varianzschätzungen $\hat{\sigma}^2_A = \frac{QZA}{df_A}$ (ursprünglich $\hat{\sigma}^2_1$) und $\hat{\sigma}^2_B = \frac{QZB}{df_B}$ (ursprünglich $\hat{\sigma}^2_2$) werden aber nur die Haupteffekte erfasst. Folglich muss sich jener Varianzanteil, der durch die Wechselwirkungen verursacht wird, in der *Varianz Innerhalb* wiederfinden. Diese wird also aufgeteilt in $\hat{\sigma}^2_{A\times B}$ und die („neue“) Varianz Innerhalb $\hat{\sigma}^2_0$.

Wichtig:

Die Daten, die man bei einer einfachen VA zur Verfügung hat, reichen hier nicht aus. Um Informationen über die Wechselwirkungen zu erhalten, muss man unter jeder Kombination von Stufen der Faktoren A und B eine aus *mehreren* Messwerten bestehende Stichprobe zur Verfügung haben. Außerdem wird vorausgesetzt, dass diese Stichproben alle den selben Umfang n haben.

VORGEHENSWEISE

Voraussetzungen

Die Voraussetzungen entsprechen im Wesentlichen denen der einfachen VA:

1.) Intervallskalenniveau der Messung

2.) Normalverteilung innerhalb jeder Stichprobe

3.) Homogenität der Varianzen

4.) Unabhängigkeit der Stichproben

Momentan sind wir lediglich in der Lage, die dritte Voraussetzung abzutesten (nachdem alle Stichproben den selben Umfang haben, kann stets der *Cochran*-Test verwendet werden).

Aufstellen der Hypothesen

Da nun drei verschiedene Effekte auf Signifikanz geprüft werden (Einfluss von A, B und $A \times B$), sind auch drei Null- und Alternativhypothesen notwendig. Hierbei sei α_j die Wirkung des Faktors A, β_l die des Faktors B und γ_{jl} die Wechselwirkung $A \times B$:

Für den Faktor A:

$H_0^1 \ldots \forall(p,q) : \alpha_p = \alpha_q$

$H_1^1 \ldots \exists(p,q) : \alpha_p \neq \alpha_q$

Für den Faktor B:

$H_0^2 \ldots \forall(p,q) : \beta_p = \beta_q$

$H_1^2 \ldots \exists(p,q) : \beta_p \neq \beta_q$

Für die Wechselwirkung $A \times B$:

$H_0^3 \ldots \forall(p,q,r,s): \gamma_{pq} = \gamma_{rs}$

$H_1^3 \ldots \exists(p,q,r,s): \gamma_{pq} \neq \gamma_{rs}$

Berechnen der Varianzschätzungen

Quelle	QS	df	$\hat{\sigma}^2$
total	$QT = \sum\limits_{ijl} x_{ijl}^2 - \frac{(\sum\limits_{ijl} x_{ijl})^2}{N}$	$N-1$	
zw. A	$QZA = \frac{1}{nm}\sum\limits_{j}(\sum\limits_{il} x_{ijl})^2 - \frac{(\sum\limits_{ijl} x_{ijl})^2}{N}$	$k-1$	$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{QZA}{k-1}$
zw. B	$QZB = \frac{1}{nk}\sum\limits_{l}(\sum\limits_{ij} x_{ijl})^2 - \frac{(\sum\limits_{ijl} x_{ijl})^2}{N}$	$m-1$	$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{QZB}{m-1}$
$A \times B$	$Q(A \times B) = QT - QZA - QZB - QI$	$(k-1) \cdot (m-1)$	$\hat{\sigma}_{A\times B}^2 = \frac{QR}{(k-1)\cdot(m-1)}$
innerhalb	$QI = \sum\limits_{ijl} x_{ijl}^2 - \frac{1}{n}\sum\limits_{jl}(\sum\limits_{i} x_{ijl})^2$	$(n-1) \cdot km$	$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{QI}{(n-1)\cdot km}$

Erläuterungen zu den Formeln:

Der Index $i = 1, \ldots, n$ steht für die verschiedenen Werte in einer Stichprobe (Vpn bzw. Messwiederholungen), $j = 1, \ldots, k$ für die Stufen von A, und $l = 1, \ldots, m$ steht für die Stufen von B.

Der zweite Teil der Formeln für QT, QZA und QZB ist ident, muss also nur einmal berechnet werden.

Zur Probe: Die Summe der df-Werte für QZA, QZB, $Q(A \times B)$ und QI muss den df-Wert für QT ergeben.

$N \ldots$ Gesamtzahl der Messwerte (da alle Stichproben den gleichen Umfang n haben, gilt $N = n \cdot k \cdot m$)

$\sum\limits_{ijl} x_{ijl} \ldots$ Summe aller Messwerte

$\sum\limits_{ijl} x_{ijl}^2 \ldots$ Summe der Quadrate aller Messwerte

$\sum\limits_{il} x_{ijl} \ldots$ Summe aller Werte für eine bestimmte Stufe von A (für alle Stufen von B)

$\sum\limits_{ij} x_{ijl} \ldots$ Summe aller Werte für eine bestimmte Stufe von B (für alle Stufen von A)

$\sum\limits_{i} x_{ijl} \ldots$ Summe aller Werte einer Stichprobe (für eine bestimmte Kombination $A \times B$)

Der F-Test

Die berechneten Varianzen müssen nun nach Vorschrift des F-Tests dividiert und der resultierende F-Wert mit dem entsprechenden kritischen Wert verglichen werden. Für die drei Tests gelten i.A. verschiedene kritische F-Werte, abhängig von der jeweiligen Zahl der Freiheitsgrade der verglichenen Varianzen.

Prüfgrößen

Für den Haupteffekt des Faktors A:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_A^2}{\hat{\sigma}_0^2}$$

Für den Haupteffekt des Faktors B:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_B^2}{\hat{\sigma}_0^2}$$

Für die Wechselwirkung $A \times B$:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_0^2}$$

Anmerkung:
Wieder interessiert uns nur, welche Varianzen signifikant *größer* als $\hat{\sigma}_0^2$ sind. Daher wird - wie immer bei Varianzanalysen - einseitig getestet.

Vorsicht bei der Interpretation

Bei der Interpretation signifikanter Haupteffekte ist zu berücksichtigen, ob auch die Wechselwirkung der beiden Faktoren einen signifikanten Einfluss auf die Daten hat! In diesem Fall muss man genau darauf achten, welche Stufen des einen Faktors generell (unabhängig vom anderen Faktor) höhere bzw. niedrigere Messwerte nach sich ziehen und bei welchen Stufen der Effekt von der Stufe des anderen abhängt.