Einfache Varianzanalyse für abhängige Stichproben

Wie beim t-Test gibt es auch bei der VA eine Alternative für abhängige Stichproben.

Anmerkung:

Was man unter abhängigen Stichproben versteht und wie diese herbeizuführen sind, ist in Abschnitt *3.6. t-Test für abhängige Stichproben* nachzulesen.

UNTERSCHIEDE ZUR VA FÜR UNABHÄNGIGE STICHPROBEN

Grundsätzlich liegt der Unterschied zur VA für unabhängige Stichproben darin, dass mit jedem Messwert genau ein Wert jeder anderen Stichprobe verbunden ist. Zur besseren Übersichtlichkeit gehen wir hier stets davon aus, dass die Stichproben bereits so geordnet sind, dass die jeweils ersten, zweiten, ..., n-ten Werte zusammen gehören. Natürlich müssen alle Stichproben den selben Umfang (n) haben. Die Daten lassen sich also in n verschiedene *Blöcke* zu je k Messwerten einteilen.

Vorteil

Im unabhängigen Fall berechnet man neben der Varianz zwischen den Stichproben (also dem Effekt der verschiedenen Versuchsbedingungen) noch die Varianz innerhalb jeder einzelnen Stichprobe. Die Auswirkungen der verschiedenen Vpn auf die Messwerte können nicht berücksichtigt werden. Man hat von jeder Vp nur einen einzelnen Wert zur Verfügung und kann deshalb die individuellen Verschiedenheiten nicht von den Zufallsschwankungen unterscheiden.

Bei abhängigen Stichproben hat man zu jeder Vp einen ganzen Block aus k verschiedenen Werten und kann - indem man die Varianz *zwischen den Blöcken* schätzt - den Einfluss der unterschiedlichen Leistungsfähigkeit der Vpn von der Auswirkung zufälliger Abweichungen auf die Daten trennen.

Aufteilung der QT

Die totale Abweichungsquadratsumme lässt sich hier in drei Komponenten zerlegen:

- $QZV \ldots$ Abweichungsquadratsumme zw. Versuchspersonen
- $QZB \ldots$ Abweichungsquadratsumme zwischen Bedingungen
- $QR \ldots$ restliche Abw.quadratsumme ($\rightarrow$ Zufallsschwankungen)

$$QT = QZV + QZB + QR$$

Für die Freiheitsgrade gilt analog:

$$df_{QT} = df_{QZV} + df_{QZB} + df_{QR}$$

VARIANZSCHÄTZUNGEN

Als Schätzung für die zufallsbedingte (Rest-)Varianz dient nun:

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{QR}{df_{QR}}$$

Weiters werden geschätzt:

Varianz zwischen Bedingungen $\ldots \hat{\sigma}_1^2 = \frac{QZB}{df_{QZB}}$

Varianz zwischen Vpn $\ldots \hat{\sigma}_2^2 = \frac{QZV}{df_{QZV}}$

SIGNIFIKANZPRÜFUNG

Mit σ_0^2 kann also jetzt nicht mehr nur die *Varianz zwischen Bedingungen* (entspricht der *Varianz Zwischen* bei der VA unabh.) verglichen werden, sondern auch die *Varianz zwischen Vpn*. Das bedeutet, dass man nun unabhängig voneinander zwei Effekte auf Signifikanz prüfen kann: Die Auswirkung der verschiedenen Versuchsbedingungen und den Einfluss der Versuchspersonen.

AUFSTELLEN DER HYPOTHESEN

Dementsprechend lassen sich zwei Nullhypothesen und entsprechende Alternativhypothesen formulieren:

$H_0^1 \ldots$ Alle Bedingungen sind gleich wirksam.

$H_1^1 \ldots$ Nicht alle Bedingungen sind gleich wirksam (zumindest zwei Bed. sind unterschiedlich wirksam).

$H_0^2 \ldots$ Alle Vpn sind gleich leistungsfähig.

$H_1^2 \ldots$ Nicht alle Vpn sind gleich leistungsfähig (zumindest zwei Vpn sind unterschiedlich leistungsfähig).

Bezeichnet man den Effekt der Bedingungen auf die Werte mit β_j und den der Vpn mit α_i, so kann man die Hypothesen formal folgendermaßen anschreiben:

$$H_0^1 \ldots \beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k$$

$$H_1^1 \ldots \exists \beta_j, \beta_l : \ \beta_j \neq \beta_l$$

$$H_0^2 \ldots \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n$$

$$H_1^2 \ldots \exists \alpha_j, \alpha_l : \ \alpha_j \neq \alpha_l$$

BERECHNEN DER VARIANZSCHÄTZUNGEN

Quelle	Abweichungsquadratsumme	df	$\hat{\sigma}^2$
total	$QT = \sum_{ij} x_{ij}^2 - \frac{(\sum_{ij} x_{ij})^2}{N}$	$N-1$	
zw. Bed.	$QZB = \frac{1}{n}\sum_j(\sum_i x_{ij})^2 - \frac{(\sum_{ij} x_{ij})^2}{N}$	$k-1$	$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{QZB}{k-1}$
zw. Vpn	$QZV = \frac{1}{k}\sum_i(\sum_j x_{ij})^2 - \frac{(\sum_{ij} x_{ij})^2}{N}$	$n-1$	$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{QZV}{n-1}$
Rest	$QR = QT - QZB - QZV$	$(n-1)\cdot(k-1)$	$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{QR}{(n-1)\cdot(k-1)}$

Erläuterungen zu den Formeln:

Der Index j steht für die verschiedenen Bedingungen, während i für die verschiedenen Vpn (Blöcke) steht.

Da alle Stichproben den gleichen Umfang n haben, gilt: $N = n \cdot k$

Der zweite Teil der Formeln für QT, QZB und QZV ist ident, muss also nur einmal berechnet werden.

Zur Probe: Die Summe der df-Werte für QZB, QZV und QR muss den df-Wert für QT ergeben.

$\sum\limits_{ij} x_{ij} \ldots$ Summe aller Messwerte

$\sum\limits_{ij} x_{ij}^2 \ldots$ Summe der Quadrate aller Messwerte

$\sum\limits_{i} x_{ij} \ldots$ Summe aller Werte in einer bestimmten Bedingung (für alle Versuchspersonen)

$\sum\limits_{j} x_{ij} \ldots$ Summe aller Werte für eine bestimmte Vp (in allen Bedingungen)

DER F-TEST

Die Verhältnisse der berechneten Varianzen müssen nun mit den entsprechenden kritischen Werten verglichen werden. *Vorsicht:* Da sich die df-Werte i.A. unterscheiden, gelten für die beiden Prüfungen verschiedene kritische F-Werte!

Prüfgrößen

Für den Effekt der Bedingungen:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_0^2}$$

Für den Effekt der Vpn:

$$F = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_0^2}$$

Anmerkung:
Wie bei der VA für unabhängige Stichproben ist nur interessant, ob $\hat{\sigma}_1^2$ bzw. $\hat{\sigma}_2^2$ signifikant *größer* als $\hat{\sigma}_0^2$ sind. Daher wird immer einseitig getestet; $\hat{\sigma}_0^2$ steht immer im Nenner.

Vergleich mit den kritischen Werten

Für beide Prüfgrößen wird (unabhängig voneinander) der kritische Wert aus der Tabelle ermittelt. Der Vergleich zeigt, ob beide Effekte, nur einer oder keiner von beiden signifikant ist.

Vorsicht:
Mögliche Wechselwirkungen (einzelne Vpn sind evtl. unter bestimmten Bedingungen überdurchschnittlich leistungsfähig oder besonders schwach) können mit diesem Design *nicht* untersucht werden!

ZWEI FAKTOREN?

Betrachtet man die Formeln für die Varianzschätzungen zwischen den Versuchspersonen und zwischen den Versuchsbedingungen, so sieht man, dass sie äquivalent, (bis auf Vertauschung der Indizes i und j und der Anzahl der Stufen n und k sogar ident) sind.

Die beiden Einflussfaktoren könnte man sogar als zwei Faktoren einer zweifachen VA betrachten. Allerdings hätte man für jede Kombination $A \times B$ nur einen einzelnen Messwert, wodurch die signifikanzstatistische Auswertung eventueller Wechselwirkungen unmöglich wird.