Vergleich von $\bar{x}$ mit einem hypothetischen Parameter μ_H bei gegebener Varianz σ_X^2

AUSGANGSSITUATION

Man will überprüfen, ob sich eine vorliegende Stichprobe hinsichtlich eines bestimmten Merkmals von einer bekannten Population (*Norm*population, *Vergleichs*population) signifikant unterscheidet, indem man den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ mit dem Populationsmittelwert μ vergleicht.

BISHERIGES VORGEHEN

Nach derzeitigem Wissensstand würden wir um $\bar{x}$ ein KI legen und überprüfen, ob dies μ einschließt.

Nachteil

Diese Überprüfung ist stets zweiseitig, d.h. eine begründete Erwartung kann nicht berücksichtigt werden.

Anmerkung

Je kleiner α für das KI gewählt wird, umso eher „übersieht“ man einen real vorhandenen Unterschied, je größer, umso mehr steigt die Gefahr, fälschlicherweise einen signifikanten Unterschied zu vermuten. Als Kompromiss hat sich in der Psychologie ein Signifikanzniveau von $\alpha = 0.05$ etabliert. Allerdings gibt es durchaus Situationen, in denen ein anderes α sinnvoll ist (mehr dazu in Abschnitt *3.7. Fehler 1. und Fehler 2. Art, Macht eines Tests*).

SIGNIFIKANZTEST

Man kennt μ_V der Vergleichspopulation und berechnet den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$. μ_X sei der Mittelwert jener Grundgesamtheit, aus der die Stichprobe gezogen wurde. σ_X^2 sei bekannt. Für die Stichprobenmittelwerte $\bar{X}$ gilt (siehe Abschnitt *2.4. Konfidenzintervall für μ_X einer Normalverteilung bei bekannter Varianz*):

$$\bar{X} \sim N(\mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}})$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Aufstellen der Hypothesen

$H_0 \ldots \mu_X = \mu_V$: Die Grundgesamtheit, aus der die Stichprobe gezogen wurde, unterscheidet sich nicht signifikant von der Vergleichspopulation.

$H_1 \ldots \mu_X \neq \mu_V$ (bzw. $H_1 \ldots \mu_X < \mu_V$ oder $H_1 \ldots \mu_X > \mu_V$): Es besteht ein signifikanter Unterschied (bzw. die Werte der Vergleichspopulation sind signifikant höher/niedriger).

Falls die H_0 stimmt,

ist $\mu_X = \mu_V$, also gilt für $\bar{X}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_V}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

Ergebnis

Damit lässt sich leicht jener z-Wert ermitteln, der dem vorliegenden $\bar{x}$ entspricht. Der Vergleich mit dem kritischen Wert ($z_{krit.}$) für die vorher festzulegende Irrtumswahrscheinlichkeit α (zu finden in der Tabelle für die Standard-NV oder einfacher in der t-Tabelle bei $df = \infty$) zeigt, ob der vorhandene Unterschied signifikant ist ($\Rightarrow H_0$ verwerfen, H_1 annehmen), oder nicht ($\Rightarrow H_0$ beibehalten, H_1 verwerfen).

Vergleich von z mit dem kritischen Wert

$H_1 \ldots \mu_X \neq \mu_V$: signifikant, falls $|z| \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$

$H_1 \ldots \mu_X < \mu_V$: signifikant, falls $z \leq z_\alpha$

$H_1 \ldots \mu_X > \mu_V$: signifikant, falls $z \geq z_{1-\alpha}$

Ein Beispiel zur Veranschaulichung

Ein auf Mittelwert $\mu_T = 50$ und Standardabweichung $\sigma_T = 5$ geeichter Raumvorstellungstest wird $n = 100$ Studentinnen und Studenten vorgegeben. Das durchschnittliche Testergebnis in der Stichprobe beträgt $\bar{x} = 50.9$. Kann man aufgrund dieser Ergebnisse davon ausgehen, dass Studierende eine bessere räumliche Vorstellungskraft als die Gesamtbevölkerung aufweisen? (Signifikanzniveau: $\alpha = 0.05$)

Aufstellen der Hypothesen

$H_0 \ldots \mu_X = \mu_T = 50$

$H_1 \ldots \mu_X > \mu_T$

Anmerkung

Die Formulierung der Fragestellung („bessere“) zielt nur in eine Richtung: Hier wird von vornherein ausgeschlossen, dass Studierende eine schlechtere Raumvorstellung haben könnten. Deshalb kann eine einseitige H_1 gewählt werden. (Auf die Frage, ob diese Annahme inhaltlich sinnvoll ist, wird hier bewusst nicht näher eingegangen.)

Falls die H_0 stimmt

kann man den Stichprobenmittelwert wie folgt standardisieren:

$$z = \frac{\bar{x} - 50}{\frac{5}{\sqrt{100}}} = \frac{\bar{x} - 50}{0.5}$$

Demnach entspricht dem vorliegenden $\bar{x}$ folgender z-Wert:

$$z = \frac{50.9 - 50}{0.5} = \frac{0.9}{0.5} = 1.8$$

Ergebnis

Der kritische Wert stellt die Grenze dar, ab der der ermittelte z-Wert signifikant ist. Für $\alpha = 0.05$ bei einseitiger Testung gilt:

$$z_{krit.} = 1.65$$

In diesem Beispiel ist das Ergebnis signifikant ($1.8 > 1.65$). Die Antwort lautet also: Ja, man kann aufgrund der vorliegenden Stichprobe davon ausgehen, dass Studentinnen und Studenten im Durchschnitt eine bessere Raumvorstellung haben als die Gesamtbevölkerung.

VORTEIL GEGENÜBER KI-METHODE

Der Vorteil gegenüber der Berechnung eines Konfidenzintervalls um $\bar{x}$ und anschließender Überprüfung, ob μ eingeschlossen ist, liegt vor allem in der Möglichkeit, einseitig zu testen. Zweiseitige Testung liefert exakt die selben Ergebnisse wie das Vorgehen mittels KI (eventuell mit geringer Zeitersparnis). Eine einseitige H_1 stellt allerdings eine zusätzliche Information dar (eine Abweichung zur anderen Seite wird ausgeschlossen), wodurch die Chance auf ein signifikantes Ergebnis steigt.

Wichtig:

Die Alternativhypothese muss ohne Berücksichtigung der aktuellen Daten formuliert werden. Eine gerichtete H_1 ist nur zulässig, wenn der Ausschluss einer Signifikanz auf der Gegenseite aufgrund inhaltlicher Vorinformationen erfolgt oder die vorgegebene Fragestellung nur in eine Richtung geht.

Im obigen Beispiel hätte man bei zweiseitiger Testung ($z_{krit.} = 1.96$) die H_0 beibehalten müssen. Durch die einseitige Fragestellung war es aber möglich, sich auf eine Richtung zu beschränken und zu einem signifikanten Ergebnis zu kommen. Der Nachteil dieser einseitigen Testung ist, dass man es „übersehen“ hätte, falls Studentinnen und Studenten signifikant schlechter als die Gesamtbevölkerung abgeschnitten hätten.