Konfidenzintervall für μ_X einer NV bei bekannter Varianz

Voraussetzung

Falls X normalverteilt und die **Varianz** σ_X^2 **bekannt** ist, lässt sich auf Basis eines gegebenen Stichprobenmittelwerts $\bar{x}$ ein KI für den Parameter μ_X einfach berechnen. Dieser Fall wird unten betrachtet. Um auch bei unbekannter Varianz ein KI ermitteln zu können, sind weitere Kenntnisse notwendig, die in den folgenden Abschnitten behandelt werden.

Berechnen des KI

Aus dem vorigen Abschnitt kennen wir die Verteilung der Stichprobenmittelwerte einer normalverteilten Variablen:

$$\bar{X} \sim N(\mu_X, \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}})$$

Um ein KI berechnen zu können, muss $\bar{X}$ standardisiert werden:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}}$$

Für die standardnormalverteilte Variable Z gilt mit Irrtumswahrscheinlichkeit α:

$$|Z| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

Also gilt (mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha$):

$$\left| \frac{\bar{X} - \mu_X}{\frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}} \right| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

$$|\bar{X} - \mu_X| \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$

Die Grenzen des symmetrischen Konfidenzintervalls sind also:

$$\mu_{1,2} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$$