Der Differenzenquotient

Ein Quotient zweier Zahlen gibt ihr Verhältnis zueinander an. Ein Differenzenquotient gibt an, wie stark sich der Funktionswert einer Funktion f(x) ändert, wenn sich x von einem Punkt $x_1$auf einen Punkt x_2 ändert. Den Abstand

$$x_2-x_1$$

nennt man

$$\Delta x$$

Die Werte für f(x1) und f(x2) sind Werte auf der y-Achse.
Darum nennt man

$$f(x_2) – f(x_1)$$

auch

$$\Delta y$$

Der Differenzenquotient heißt dann:

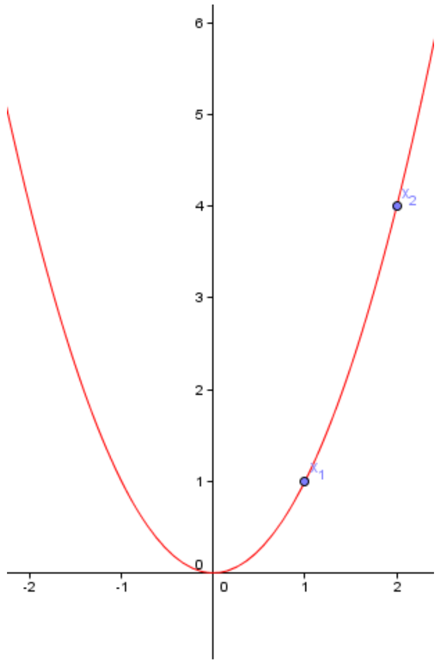
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1+\Delta x)-f(x_1)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Der Differenzenquotient ist dann also der Proportionalitätsfaktor, der angibt, wie stark sich der Funktionswert einer Funktion pro x-Wert-Differenz Δx ändert. Wir nennen den Differenzenquotient hier k:

$$\Delta y \approx k^* \Delta x$$

Sehen wir uns das Ganze anhand eines Beispiels an:

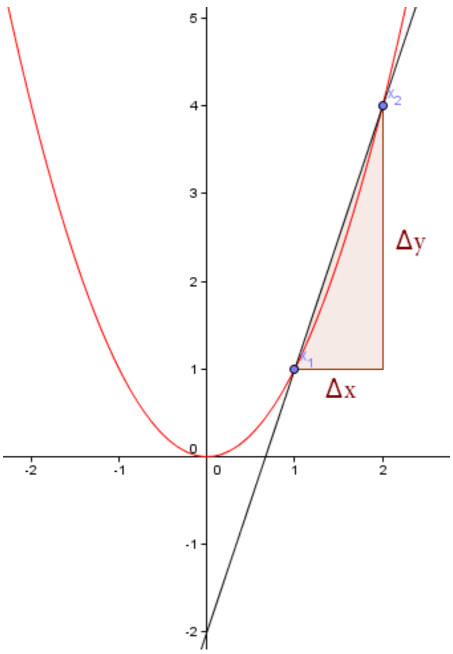
$$f(x) = x^2$$



Wir nehmen unsere Punkte $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$.

$f(x_1)=1$

$f(x_2)= 4$



Der Differenzenquotient ist dann:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2-1} = 3$$

Die Linie, die durch die Punkte x_1 und x_2 geht, nennt man Sekante. Sie hat (wie alle linearen Funktionen) die Form:

$$y = kx + d$$

Der Differenzenquotient entspricht dabei der Steigung der Sekante k.

Da sich die Funktionswerte (zumindest in einem kleinen Bereich um x_1) der Funktion selbst und der zugehörigen Sekante pro Δx ähnlich stark ändern, sagt man, die Sekante "approximiert" die Funktion, d.h. die Sekante verhält sich in kleinen Bereichen um x_1 ähnlich wie die Funktion f(x).

Merke: Der Differenzenquotient zwischen zwei Punkten entspricht der Steigung der Sekante zwischen diesen Punkten!