

RECHENBEISPIEL

Bestimme die Extremstellen und das Monotonieverhalten der Funktion. Fertige außerdem eine Graphik der Funktion an.

$$f(x) = \frac{1}{3} x^3 - 3 x^2 + 4 x + 3$$

Um die Extrema bestimmen zu können berechnen wir die erste Ableitung von $f(x)$.

$f'(x) = x^2 - 6x + 4$. Als nächsten Schritt setzen wir $f'(x) = x^2 - 6x + 4 = 0$ und formen nach x um. Zum Lösen von x verwenden wir die kleine Lösungsformel und erhalten schließlich $x_1 = 0.76$ und $x_2 = 5.24$.

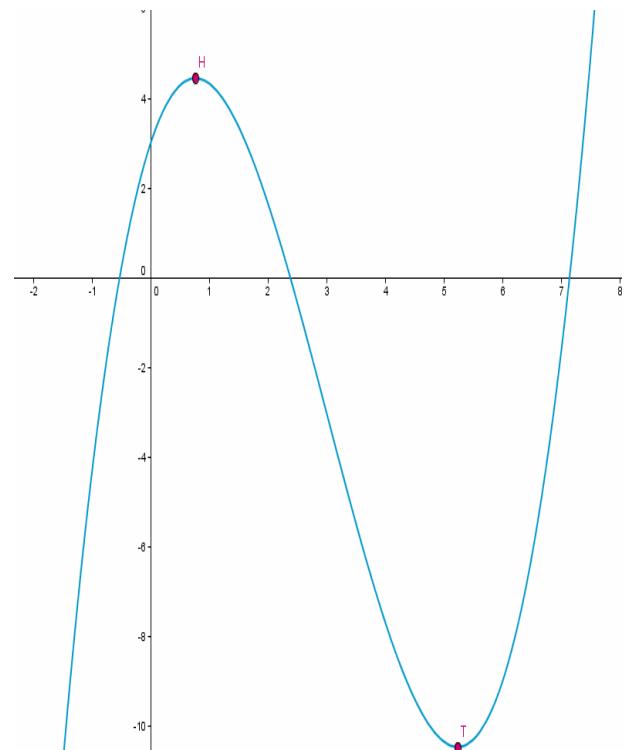
Als nächstes müssen wir entscheiden ob es sich um einen Hochpunkt oder Tiefpunkt handelt. Dafür berechnen wir die zweite Ableitung $f''(x) = 2(x - 3)$ und setzen die beiden x -Werte in die Funktion ein.

- Für $x_1 = 0.76$ erhalten wir $f''(0.76) = 2(0.76 - 3) = -4.48$
- Für $x_2 = 5.24$ erhalten wir $f''(5.24) = 2(5.24 - 3) = 4.48$

Da für x_1 der Wert der 2. Ableitung negativ ist, wissen wir, dass es sich um einen Hochpunkt handeln muss. Analog für x_2 wissen wir, dass es sich um einen Tiefpunkt handeln muss.

Schlussendlich setzen wir die x -Werte noch in $f(x)$ ein, um die entsprechenden Funktionswerte der Extrema zu erhalten:

- Für $x_1 = 0.76$ gilt $H(0.76/4.45)$
- Für $x_2 = 5.24$ gilt $T(5.24/-10.24)$



Anhand des Graphen können wir nun das Monotonieverhalten besprechen. Wir erkennen die folgenden Eigenschaften der Funktion und wissen daher:

- Sie ist für $x < 0.76$ monoton steigend.
- Sie ist für $0.76 < x < 5.24$ monoton fallend.
- Sie ist für $x > 5.24$ monoton steigend.