

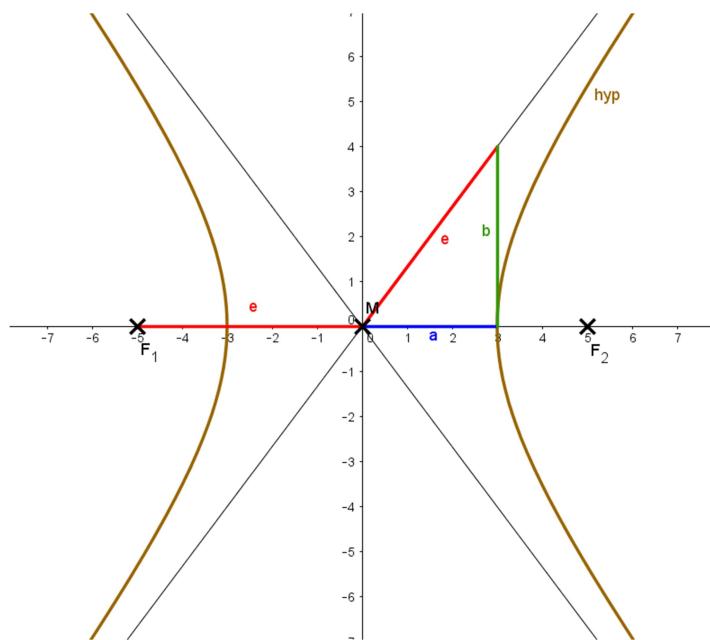
Die Hyperbelgleichung

Im Folgenden wollen wir die allgemeine Gleichung der Hyperbel im \mathbb{R}^2 in 1. Hauptlage herleiten.

Die Definition der Hyperbel hyp mit festen Brennpunkten F_1 und F_2 sowie der Hauptachsenlänge a ist:

$$hyp = \{X \in \mathbb{R}^2 \mid |XF_1| - |XF_2| = 2a\}$$

Aus folgender Grafik entnehmen wir entsprechende Werte:



Aus der Grafik erkennen wir, dass $F_1 = (-e|0)$ und $F_2 = (e|0)$. Daraus folgt, dass für alle Punkte $X = (x|y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\overrightarrow{XF_1} = -\begin{pmatrix} x + e \\ y \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{XF_2} = -\begin{pmatrix} x - e \\ y \end{pmatrix}$$

Daraus folgt:

$$|XF_1| = \sqrt{(x + e)^2 + y^2} \text{ und } |XF_2| = \sqrt{(x - e)^2 + y^2}$$

Nun setzen wir in die Definition ein und berechnen:

$$|XF_1| - |XF_2| = \sqrt{(x + e)^2 + y^2} - \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x + e)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x - e)^2 + y^2}$$

$$(x + e)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x - e)^2 + y^2} + (x - e)^2 + y^2$$

$$(x + e)^2 - (x - e)^2 - 4a^2 = 4a\sqrt{(x - e)^2 + y^2}$$

$$4ex - 4a^2 = 4a\sqrt{(x - e)^2 + y^2}$$

$$ex - a^2 = a\sqrt{(x - e)^2 + y^2}$$

$$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2(x^2 - 2ex + e^2 + y^2)$$

$$e^2x^2 - 2a^2ex + a^4 = a^2x^2 - 2a^2ex + a^2e^2 + a^2y^2$$

$$e^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2e^2 + a^2y^2$$

$$a^4 - a^2e^2 - a^2y^2 = a^2x^2 - e^2x^2$$

$$a^2(a^2 - e^2) - a^2y^2 = x^2(a^2 - e^2)$$

Nun wissen wir, dass $-b^2 = a^2 - e^2$ und setzen in die Gleichung ein:

$$-a^2b^2 - a^2y^2 = -x^2b^2$$

Und nach umformen erhalten wir:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$