Christian Kathrein

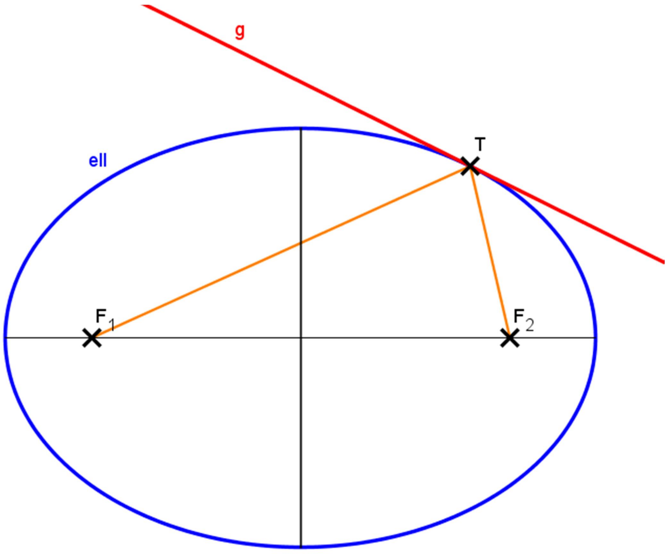
Tangenten an Ellipsen

Wir überlegen uns, wie man Tangenten von einem Punkt an eine Ellipse legen kann. Dazu betrachten wir zwei Fälle:

1.) Der Punkt liegt auf der Ellipse
2.) Der Punkt liegt außerhalb der Ellipse

Tangente von einem Punkt auf der Ellipse

Wir kennen die Ellipse ell Achsenlängen a und b sowie einen Punkt $T = (x_T|y_T)$, welcher auf dem Kreis liegt. Gesucht ist die Gerade g, sodass g eine Tangente von k ist und durch T verläuft.



Um die Steigung der Tangente an diesem Punkt bestimmen zu können, müssen wir zunächst die Ellipsengleichung implizit differenzieren:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \Rightarrow 2b^2x + 2a^2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2x}{a^2y}$$

Nun setzen wir den Punkt T in diese Ableitung ein und wir erhalten:

$$k = -\frac{b^2x_T}{a^2y_T}$$

Nun gilt ja für die Steigung im Allgemeinen $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y - y_T}{x - x_T} = -\frac{b^2x_T}{a^2y_T}$$

$$a^2yy_T + b^2xx_T = a^2y_T^2 + b^2x_T^2 = a^2b^2$$

Somit haben wir auch hier die Spaltform der Tangentengleichung erhalten:

$$a^2yy_T + b^2xx_T = a^2b^2$$

Tangente von einem Punkt außerhalb der Ellipse

Liegt der Punkt P von dem aus man die Tangenten an die Ellipsen bestimmen soll außerhalb der Ellipse, dann geht man folgendermaßen vor:

Man setzt in die Spaltform der Tangentengleichung die Koordinaten von P ein und erhält:

$$a^2yy_P + b^2xx_P = a^2b^2$$

Diese Gleichung ist die Gleichung der Geraden, welche durch die beiden Berührpunkte der Tangenten verläuft. Nun muss man nur mehr diese Gerade mit der Ellipse schneiden und man erhält die Koordinaten der beiden Berührpunkte. Nach Einsetzen in die Tangentengleichung hat man das gewünschte Ergebnis.