Schularbeit aus Mathematik – Musterlösung

1)

a) $\frac{df}{dx} = 8x + 26$

b) $\frac{df}{dy} = 0$

c) $\frac{df}{dx} = \frac{(100x^3 - 26x)(10x^3 + 7) - (25x^4 - 13x^2)(30x^2)}{(10x^3 + 7)^2} = \frac{(1000x^6 - 260x^4 + 700x^3 - 182\,x) - (750x^6 - 390x^4)}{(10x^3 + 7)^2} =$

$= \frac{250x^6 + 130x^4 + 700x^3 - 182x}{(10x^3 + 7)^2}$

d) $\frac{df}{dx} = \frac{1}{x}x^4 + \ln(x)\,4x^3 = x^3 + 4\ln(x)\,x^3 = x^3(1 + 4\ln(x))$

e) $\frac{df}{dx} = 5(13x^2 + 4x)^4(26x + 4) = (13x^2 + 4x)^4(130x + 20)$

f) $\frac{df}{db} = 12a^2b^3 - 24ab + 3$

g) $\frac{df}{dz} = 2\sin(\mathrm{z})\cos(\mathrm{z}) - (-\sin(\mathrm{z})(\mathrm{z}^2 + 3)^7 + \cos(\mathrm{z})7(\mathrm{z}^2 + 3)^6(2\mathrm{z})) =$

$= 2\sin(z)\cos(z) + \sin(z)(z^2 + 3)^7 - 14z\,\cos(z)(z^2 + 3)^6$

---

2)

a) D = $\mathbb{R}$

b) $f(x) = x^3 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = -2$ → $N_1 = (-2/0)$

$x_2 = 1$ → $N_2 = (1/0)$

c) $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$

$x_3 = 1$; $f(x_3) = 0$ → $E_1 = (1/0)$

$x_4 = -1$; $f(x_4) = 4$ → $E_2 = (-1/4)$

d) $f''(x) = 6x = 0$

$x_5 = 0$; $f(x_5) = 2$ → W = (0/2)

Kontrolle: $f'''(x) = 6$ = const ≠ 2 → W ist wirklich Wendepunkt

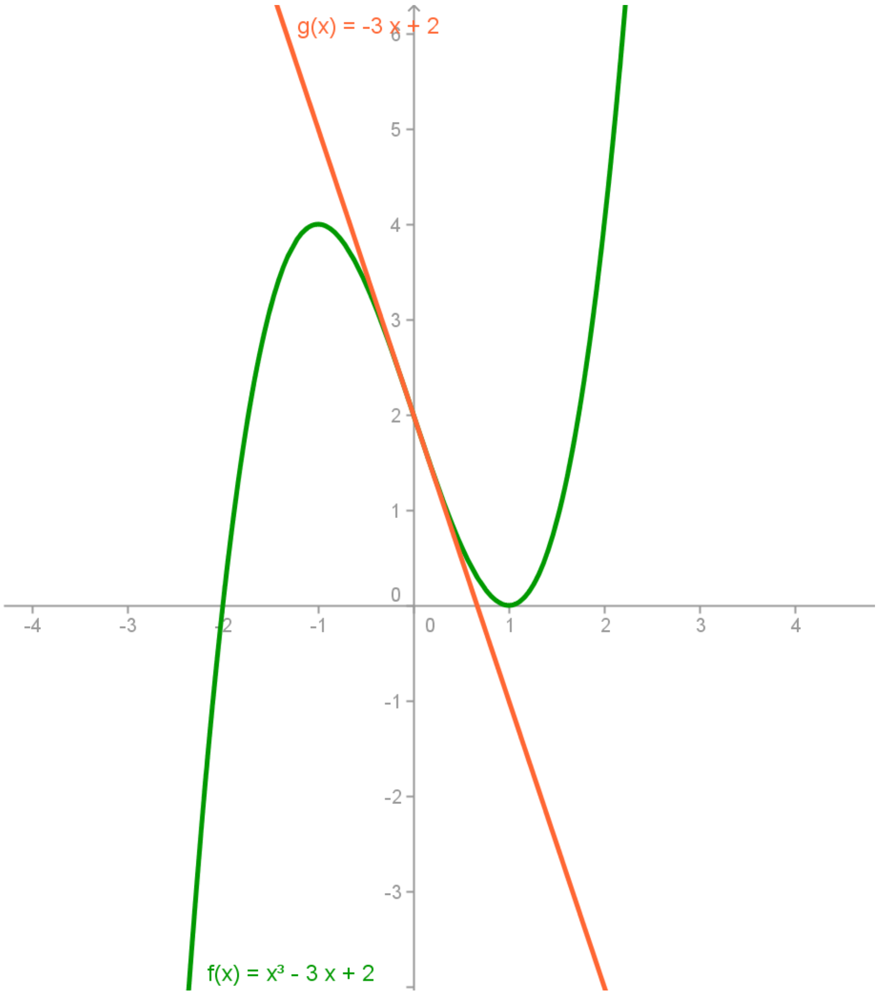
e) $f'(x5) = -3 = k$

y = kx + d   2 = -3 · 0 + d → d = 2

➔ Wendetangente: y = -3x + 2

ad 2)

f) Kopie aus **GeoGebra:**



(2 getrennte Graphiken werden auch akzeptiert.)

3)

a) <u>HB:</u> $V = a \cdot b \cdot c \to max$

<u>NB 1:</u> $2b + c = 20$

<u>NB 2:</u> $2a + 2b = 20$

➔ $2a = c$

➔ $c = 20 - 2b$
➔ $a = 10 - b$

➔ $V(b) = (10 - b) \cdot b \cdot (20 - 2b) = 2b^3 - 40b^2 + 200b \to max$
➔ $V'(b) = 6b^2 - 80b + 200 = 0$

➔ $b_1 = 10$
$b_2 = 3{,}333\ldots$

➔ $b_1 = 10$ → a; c = 0 → b_1 ist keine Lösung des Problems
➔ b2 = 3,333… → a = 6,666…; c = 13,333… → b_2 ist mögliche Lösung des Problems

➔ Überprüfen, ob b_2 Maximum ist:
$V''(b) = 12b - 80$
$V''(3{,}333\ldots) < 0 \to MAXIMUM!$

➔ LÖSUNG: a = 6,666… b = 3,333… c = 13,333…

b) $V = a \cdot b \cdot c = 296{,}3\ cm^2$

4)

Die erste Ableitung beschreibt die *<u>Steigung</u>* einer Kurve;

die zweite Ableitung beschreibt die *<u>Krümmung</u>* einer Kurve.

5)

Die 1. Ableitung der Geschwindigkeit heißt auch *<u>Beschleunigung</u>* und ist umso größer, je

… schneller die Geschwindigkeit steigt,

… steiler der Funktionsgraph ist.

BONUSFRAGE)

Differenzenquotient: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ bzw. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x1)-f(x0)}{x1-x0}$

Der Differenzenquotient gibt die Änderung der Funktionswerte im Verhältnis zur Änderung der Argumente an. Er gibt also die Steigung einer Funktion in einem Intervall [a,b] an.

Die erste Ableitung einer Funktion ist gleichbedeutend dem Grenzwert des Differenzenquotienten.

Als Formel: $\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{x \to x0} \left(\frac{f(x)-f(x0)}{x-x0}\right)$

Die erste Ableitung (der Differentialquotien) gibt also die Steigung einer Funktion in einem Punkt – an der Stelle x_0 – an. Durch Anwenden des Limes lässt man also das Intervall des Differenzenquotienten gegen 0 gehen und erhält so anstelle einer Steigung pro Intervall/Strecke eine Steigung in einem Punkt.