Workshop Analysis WS 2004/05

Folgen und Reihen - Arithmetische Folge

Petra Grell

Lösung zur Expliziten Darstellung der arithmetischen Folge

Eine arithmetische Folge hat die Eigenschaft, dass sich zwei aufeinanderfolgende Glieder immer durch einen konstanten Term d unterscheiden. Dies heißt für die rekursive Darstellung folgendes:

$$x_{n+1} = x_n + d$$

Startwert der Folge ist x_1.

Um daraus nun eine explizite Darstellung zu gewinnen, geht man wie folgt vor:

$$x_n = x_{n-1} + d \tag{1}$$

Nun gilt aber $x_{n-1} = x_{n-2} + d$, da die rekursive Darstellung für jedes Folgenglied gilt, also auch für x_{n-1}.

Dies setzen wir in (1) ein und erhalten:

$$x_n = x_{n-1} + d = x_{n-2} + d + d = x_{n-2} + 2 \cdot d$$

Dasselbe können wir nun mit $x_{n-2} = x_{n-3} + d$ machen: Um daraus nun eine explizite Darstellung zu gewinnen, geht man wie folgt vor:

$$x_n = x_{n-2} + 2 \cdot d = x_{n-3} + d + 2 \cdot d = x_{n-3} + 3 \cdot d \tag{2}$$

Diesen Vorgang wiederholt man nun so oft, bis man bei $x_{n-(n-2)} = x_2$ angekommen ist.

Betrachtet man den letzten Teil der Gleichung (2), so sieht man, dass die Summe aus dem Index, nämlich $n-3$, und dem Koeffizienten von d, nämlich 3, genau n ergibt. Will man, dass statt x_{n-3} nun x_2 steht, so muss man den Koeffizienten von d durch $n-2$ ersetzen, damit die Summe wieder n ist.

Man erreicht also Folgendes:

$$x_n = x_2 + (n-2) \cdot d$$

Nun gilt wie vorher, dass $x_2 = x_1 + d$ ist. Somit haben wir

$$x_n = x_2 + (n-2) \cdot d = x_1 + (n-1) \cdot d$$

Dies ist nun unsere explizite Darstellung der arithmetischen Folge.

Insgesamt erhält man also

$$x_n = x_1 + (n-1) \cdot d$$