

Workshop Analysis WS 2004/05

Integralrechnung - Bestimmtes Integral

Petra Grell

1. Wiederhole, was man unter dem „Bestimmten Integral“ einer Funktion versteht! Wie berechnet man es? Wie kommt man darauf?
2. Was ist der Flächeninhalt A unter einer stetigen, positiven Funktion f über dem Intervall $[a; b]$? Wie berechnet man diesen?
3. Was ist der Unterschied zwischen dem „Bestimmten Integral“ von f mit der Obergrenze b und der Untergrenze a und dem Flächeninhalt A unter f über dem Intervall $[a; b]$? Wo fällt dieser Unterschied auf, wo nicht? Bei welchen Funktionen f muss man speziell Acht geben, wenn man den Flächeninhalt berechnen will?
4. Berechne das Bestimmte Integral für $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$. Wie lautet der Flächeninhalt unter $\sin x$ über $[0; 2\pi]$? Was ist der Unterschied? Welche Nullstellen hat $\sin x$ auf diesem Intervall?
5. Berechne das Bestimmte Integral

(a) $\int_0^2 x^2 \, dx$

(b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x \, dx$

(c) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(d) $\int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 1\right) \, dx$

(e) $\int_{-2}^2 (x^3 - 2x^2 + x + 1) \, dx$

(f) $\int_2^4 \frac{5x^2 + 3x - 1}{x^2} \, dx$

(g) $\int_0^1 (2 + 3x)^3 \, dx$

(h) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx$

(i) $\int_0^1 x^2 \cdot e^{-x^3} \, dx$

(j) $\int_6^7 \frac{x+2}{x^2-8x+15} \, dx$

6. Beweise und interpretiere anhand einer Zeichnung:

Für jede stetige Funktion f auf einem Intervall $[a; b]$ und jeden Wert c mit $a < c < b$ gilt:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Hinweis: Setze die Definition des Bestimmten Integrals ein und fasse zusammen.

7. Beweise und interpretiere anhand einer Zeichnung:

$$\int_a^b f(x) \, dx = - \int_b^a f(x) \, dx$$

Hinweis: Setze wieder die Definition des Bestimmten Integrals ein und fasse zusammen.

8. Beweise und interpretiere anhand einer Zeichnung:

$$\int_a^b -f(x) \, dx = - \int_a^b f(x) \, dx$$

9. Wie groß ist das Flächenstück, welches die x-Achse von der Kurve $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ abschneidet? Mache eine Skizze!

10. Berechne den Flächeninhalt:

(a) $f(x) = \sin 2x$, $a = 0$, $b = 2\pi$

(b) $f(x) = 3 \sin \frac{x}{3}$, $a = 0$, $b = 3\pi$