Workshop Analysis WS 2004/05 - Lösungen

Folgen und Reihen - Beschränktheit von Folgen

Petra Grell

1. (a) z.B. -100 und 100, es gibt natürlich auch noch andere obere und untere Schranken
   (b) z.B. -2 und 2
   (c) z.B. 0 und 2

2. (a) Behauptung: 1 ist eine obere Schranke
   Zu zeigen: $x_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{6n-2}{4n+1} < 1$$

$$6n - 2 < 4n + 1$$

$$2n < 3$$

$$n < \frac{3}{2}$$

Das heißt, dass die Aussage $x_n < 1$ nur für $n < \frac{3}{2}$ erfüllt. Das entspricht aber nicht unserer Behauptung, dass die Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, somit ist 1 keine obere Schranke.

Behauptung: $\frac{7}{4}$ ist eine obere Schranke
Zu zeigen: $x_n < \frac{7}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{6n-2}{4n+1} < \frac{7}{4}$$

$$24n - 8 < 28n + 7$$

$$n > -\frac{15}{4}$$

Die Aussage $x_n < \frac{3}{2}$ ist für alle $n > -\frac{15}{4}$ erfüllt, somit auch für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist $\frac{7}{4}$ eine obere Schranke.

   (b) Behauptung: $\frac{3}{2}$ ist eine obere Schranke
   Zu zeigen: $x_n < \frac{3}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(-1)^n \cdot \frac{3n}{2n+1} < \frac{3}{2}$$

$$(-1)^n \cdot 6n < 6n + 3$$

n ungerade: $-6n < 6n + 3 \Leftrightarrow n > -\frac{1}{4}$
n gerade: $6n < 6n + 3 \Leftrightarrow 0 < 3$, wahre Aussage
Für n ungerade erfüllen alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung, für n gerade erhalten wir ohnedies eine wahre Aussage. Somit erfüllen alle $n \in \mathbb{N}$ die behauptete Aussage. Somit ist $\frac{3}{2}$ eine obere Schranke.

Behauptung: $\frac{5}{4}$ ist eine obere Schranke
Zu zeigen: $x_n < \frac{5}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

$$(-1)^n \cdot \frac{3n}{2n+1} < \frac{5}{4}$$

$$(-1)^n \cdot 12n < 10n + 5$$

n ungerade: $-12n < 10n + 5 \Leftrightarrow n < -\frac{5}{22}$
n gerade: $12n < 10n + 5 \Leftrightarrow n < \frac{5}{2}$
Beide Ergebnisse erfüllen nicht unsere Voraussetzung, dass die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten muss. Somit ist $\frac{5}{4}$ keine obere Schranke.

3. (a) Behauptung: 1 ist untere Schranke.
zu zeigen: $\frac{8n+1}{6n-3} > 1$. Erhält $n > -2$. Somit ist 1 eine untere Schranke.
Behauptung: $\frac{3}{2}$ ist eine untere Schranke.
zu zeigen: $\frac{8n+1}{6n-3} > \frac{3}{2}$. Erhält $n < \frac{2}{11}$. Somit ist $\frac{3}{2}$ keine untere Schranke.

   (b) Behauptung: -1 ist untere Schranke
zu zeigen: $(-1)^n \frac{5n+2}{10n+1} > -1$. Erhält $n > \frac{1}{5}$ und $n > -\frac{3}{5}$. Somit ist -1 eine untere Schranke.
Behauptung: $-\frac{1}{2}$ ist untere Schranke.
zu zeigen: $(-1)^n \frac{5n+2}{10n+1} > -\frac{1}{2}$. Erhält $-4 > 1$ und $n > -\frac{5}{20}$. Somit ist $-\frac{1}{2}$ keine untere Schranke.

4. Bei einer monoton fallenden Folge ist a_1 eine obere Schranke, bei einer monoton wachsenden Folge ist a_1 eine untere Schranke.