Workshop Analysis WS 2004/05 - Lösungen

Integralrechnung - Bestimmtes Integral

Petra Grell

1. $\int_a^b f(x)\ dx = F(x)\,\big|_a^b = F(b) - F(a)$ ist das Bestimmte Integral der Funktion f mit der Obergrenze b und der Untergrenze a. Dies ist die Fläche unter der Kurve f. Befindet sich f unterhalb der x-Achse, so ist diese Fläche negativ. Man berechnet $F(b) - F(a)$, da man vom großen Flächenstück, das zwischen der y-Achse, der x-Achse und $x = b$ liegt, das kleinere Flächenstück, welches zwischen der y-Achse, der x-Achse und $x = a$ liegt, abzieht.

2. Der Flächeninhalt ist die nicht-negative Maßzahl für die Größe der Fläche unter der Funktion f. Ist ein Teil von f unterhalb der x-Achse, so muss dieser extra berechnet werden. Anschließend nimmt man den Betrag dieses Wertes und zählt ihn zu den anderen Teilen (falls vorhanden) dazu. Ist f immer oberhalb oder unterhalb der x-Achse, so berechnet man $\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| = |F(b) - F(a)|$. Hat f jedoch eine oder mehrere Nullstellen, so integriert man von a bis zur ersten Nullstelle, dann von dieser zur nächsten Nullstelle, usw. Als letztes integriert man von der letzten Nullstelle bis b. Von allen Ergebnissen nimmt man die Beträge und addiert sie. Dann hat man den Flächeninhalt A unter f.

3. Unterschied Flächeninhalt - Bestimmtes Integral: Beim Bestimmten Integral integriert man über Nullstellen einfach hinweg, das heißt man berechnet immer $F(b) - F(a)$. Will man den Flächeninhalt wissen, so darf man das nicht. Der Unterschied fällt nur dann nicht auf, wenn f immer oberhalb der x-Achse verläuft.

   Man muss bei stetigen Funktionen mit Nullstellen acht geben.

4. Bestimmtes Integral:
   $\int_0^{2\pi} \sin x\ dx = -\cos x|_0^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0$
   Flächeninhalt:
   $\int_0^{2\pi} \sin x\ dx = \left|\int_0^{\pi} \sin x\ dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\ dx\right| = |-\cos\pi + \cos 0| + |-\cos 2\pi + \cos\pi| = 2 + |-2| = 4$

   Der Unterschied ist, dass wir beim Bestimmten Integral über die Nullstelle bei π hinwegintegrieren, beim Flächeninhalt berücksichtigen wir sie, indem wir zwei Integrale berechnen.

5. Überprüfe mit Mathematica selbst.

6. *Behauptung:*
   Für jede stetige Funktion f auf einem Intervall $[a;b]$ und jeden Wert c mit $a < c < b$ gilt:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

   Beweis: $\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx$

7. *Behauptung:*

$$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$

   Beweis: $-\int_b^a f(x)\ dx = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx$

8. *Behauptung:*

$$\int_a^b -f(x)\ dx = -\int_a^b f(x)\ dx$$

   Beweis: $\int_a^b -f(x)\,dx = \int_a^b (-1)\cdot f(x)\,dx = (-1)\cdot\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$, denn einen konstanten Faktor kann man vor das Integralzeichen setzen (Konstantenregel).

9. Nullstellen: $0 = x^3 - 6x^2 + 9x \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3$
   Flächenstück: $\int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\ dx = (\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2})|_0^3 = \frac{27}{4}$

10. Kontrolliere mit Mathematica selbst. Achte auf Substitution!