Workshop Analysis WS 2004/05 - Lösungen

Folgen und Reihen - Arithmetische Reihen

Petra Grell

1. $1 + 100 = 101$, $2 + 99 = 101$, $3 + 98 = 101$, $4 + 97 = 101$, usw.

   Diese Kombination kann man 50 mal bilden. Somit haben wir $101 \cdot 50 = 5050$

2. In Worten bedeutet diese Formel, dass man das erste und das letzte Folgenglied addiert und mit der Hälfte der Anzahl der Summanden multipliziert.

   Beweis: $a_1 + a_n$, $a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n$, $a_3 + a_{n-2} = (a_1 + 2d) + (a_n - 2d) = a_1 + a_n$, usw.

   Ist die Anzahl der Summanden gerade, d.h. $n = 2k$, so gibt es diese Kombination genau $\frac{n}{2}$-mal, nämlich $a_1 + a_{2k}, \ldots, a_k + a_{k+1}$. Somit haben wir $(a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$.

   Ist die Anzahl der Summanden ungerade, d.h. $n = 2k - 1$, so gibt es folgende Kombinationen: $a_1 + a_{2k-1}$, $a_2 + a_{2k-2}$, ...,$a_{k-1} + a_{k+1}$. D.h. man hat $k - 1$-mal $a_1 + a_n$.
   Nun fehlt aber noch der Summand $a_k = a_1 + (k - 1) \cdot d$. Betrachten wir $\frac{1}{2}(a_1 + a_{2k-1}) = \frac{1}{2}(a_1 + a_1 + (2k - 2) \cdot d) = a_1 + (k - 1) \cdot d = a_k$.
   Also haben wir insgesamt $(k - 1 + \frac{1}{2}) \cdot (a_1 + a_n) = (k - \frac{1}{2}) \cdot (a_1 + a_n) = (a_1 + a_n) \cdot \frac{2k-1}{2} = (a_1 + a_n) \cdot \frac{n}{2}$

   Somit haben wir die Formel für beide Fälle bewiesen.

3. (a) $d = 4, a_1 = 3 \Rightarrow 103 = 3 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow n = 26$
   $s = (3 + 103) \cdot \frac{26}{2} = 1378$

   (b) $d = 3, a_1 = -2 \Rightarrow 58 = -2 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 21$
   $u = (-2 + 58) \cdot \frac{21}{2} = 588$

   (c) $d = \frac{2}{3}, a_1 = \frac{4}{3} \Rightarrow 8 = \frac{4}{3} + (n - 1) \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow n = 11$
   $z = (\frac{4}{3} + 8) \cdot \frac{11}{2} = \frac{154}{3}$

4. $a_1,\ a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_1 + 2d,$

   $a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 3a_1 + 3d = 33 \Rightarrow a_1 + d = 11 \Rightarrow a_1 = 11 - d$

   $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 = (11 - d)^2 + 11^2 + (11 + d)^2 = 363 + 2d^2 = 371 \Rightarrow d = \pm 2 \Rightarrow a_1 = 9$ oder $a_1 = 13$

   $d = 2:\ a_1 = 9,\ a_2 = 11,\ a_3 = 13$
   $d = -2:\ a_1 = 13,\ a_2 = 11,\ a_3 = 9$

5. $d = 5, a_1 = -1$

   $a_{30} = -1 + 29 \cdot 5 = 144 \Rightarrow s_{30} = (-1 + 144) \cdot 15 = 2145$

   $a_{1248} = -1 + 1247 \cdot 5 = 6234 \Rightarrow s_{1248} = (-1 + 6234) \cdot 624 = 3889392$

   $a_n = -1 + (n-1) \cdot 5 \Rightarrow s_n = (-1 + (-1 + (n-1) \cdot 5)) \cdot \frac{n}{2} = (5n - 7) \cdot \frac{n}{2}$

6. $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = (1 + 2n - 1) \cdot \frac{n}{2} = n^2$

   $$\lim_{n \to \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)}{3n^2 - 1} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{3n^2 - 1} = \frac{1}{3}$$