Workshop Analysis WS 2004/05 - Lösungen

Folgen und Reihen - Konvergenz von Folgen

Petra Grell

1. (a) zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, sodass $\forall n > n_0$ gilt: $|\frac{2}{4n+5} - 0| < \varepsilon$

   Beweis: $|\frac{2}{4n+5} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{4n+5} < \varepsilon$ (da $\frac{2}{4n+5} - 0 > 0$ für alle n)
   $\Leftrightarrow 2 < (4n+5)\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2-5\varepsilon}{4\varepsilon}$
   Das heißt dass die Ungleichung $|\frac{2}{4n+5} - 0| < \varepsilon$ genau dann gilt, wenn $n > \frac{2-5\varepsilon}{4\varepsilon}$ ist. Wir können nun jedes beliebige ε in die Ungleichung einsetzen und erhalten somit den dazugehörigen Index n_0, ab dem alle nachfolgenden Glieder in der ε-Umgebung liegen.

   Für $\varepsilon = 0.05$ erhalten wir $n > \frac{2-5\cdot 0.05}{4\cdot 0.05} = 8.75$, also $n_0 = 9$. Das heißt ab dem 9. Folgenglied liegen alle nachkommenden Glieder in der ε-Umgebung von 0 mit $\varepsilon = 0.05$.

   (b) zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, sodass $\forall n > n_0$ gilt: $|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon$

   Beweis: $|\frac{1}{n^2} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < \varepsilon \cdot n^2 \Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}$.
   Rest wie oben.

   Für $\varepsilon = 0.05$ erhalten wir $n > \sqrt{\frac{1}{0.05}} = 4.472$, also $n_0 = 5$. Das heißt ab dem 5. Folgenglied liegen alle nachkommenden Glieder in der ε-Umgebung von 0 mit $\varepsilon = 0.05$.

   (c) zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, sodass $\forall n > n_0$ gilt: $|\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2}| < \varepsilon$

   Beweis: $|\frac{3n+1}{2n+1} - \frac{3}{2}| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{-1}{4n+2}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} < \varepsilon$
   (da $4n+2 > 0$ und $|-1| = 1$)
   $\Leftrightarrow n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Rest wie oben.

   Für $\varepsilon = 0.05$ erhalten wir $n > \frac{1-2\cdot 0.05}{4\cdot 0.05} = 4.5$, also $n_0 = 5$. Das heißt ab dem 5. Folgenglied liegen alle nachkommenden Glieder in der ε-Umgebung von 0 mit $\varepsilon = 0.05$.

2. zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, sodass $\forall n > n_0$ gilt: $|\frac{2}{4n+5} - 3| < \varepsilon$

   Beweis: $|\frac{2}{4n+5} - 3| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{-12n-13}{4n+5}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{12n+13}{4n+5} < \varepsilon$
   $\Leftrightarrow 12n + 13 < 4n\varepsilon + 5\varepsilon \Leftrightarrow 13 - 5\varepsilon < n(4\varepsilon - 12)$
   Nun ist $4\varepsilon - 12$ nur dann größer 0, wenn $\varepsilon > 3$. Aber wir wollen jedes beliebig kleine ε einsetzen, somit kann $4\varepsilon - 12$

auch kleiner 0 sein. Für $\varepsilon > 3$ erhalten wir $n > \frac{13-5\varepsilon}{4\varepsilon-12}$. Für $4\varepsilon - 12 < 3$ haben wir aber $n < \frac{13-5\varepsilon}{4\varepsilon-12}$. Die letzte Ungleichung bedeutet, dass für ein bestimmtes ε nur ein paar (wenige, endlich viele) Folgenglieder, nämlich die mit Index $n < \frac{13-5\varepsilon}{4\varepsilon-12}$ in der ε-Umgebung liegen. Dies ist aber ein Widerspruch dazu, dass fast alle Glieder in der ε-Umgebung drinnen sein müssen. Somit ist 3 kein Grenzwert der Folge.

3. Die Tatsache, dass die Folgenglieder ihren Grenzwert nicht annehmen ist falsch.

   Die konstante Folge $\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle$ hat als Grenzwert 1, nimmt also ihren Grenzwert an.

4. Eine sehr ähnliche Folge hatten wir bereits auf dem vorigen Übungszettel. Wir haben gesehen, dass sich diese Folge 0 annähert. Somit ist unsere Behauptung: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

   Beweis: zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, sodass $\forall n > n_0$ gilt: $|\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \varepsilon$

   $|\frac{(-1)^n}{n} - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{(-1)^n}{n}| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

   Somit haben wir gezeigt, dass 0 der Grenzwert ist.

5. $a_n \to a$ bedeutet: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, sodass $\forall n > n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

   $a_n - a \to 0$ bedeutet: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, sodass $\forall n > n_0$ gilt: $|(a_n - a) - 0| < \varepsilon$

   $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$, sodass $\forall n > n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$

   Nun steht in der ersten und in der dritten Zeile dieselbe Aussage. Somit haben beide Ausdrücke dieselbe Bedeutung.