Workshop Analysis WS 2004/05 - Lösungen

Folgen und Reihen - Geometrische Reihen

Petra Grell

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 1$ ist unendliche Summe mit endlichem Wert
   Es ist eine geometrische Folge mit $q = \frac{1}{2}$ und Startwert $b_1 = \frac{1}{2}$

2. Eine geometrische Reihe hat dann eine endliche Summe, wenn $|q| < 1$ ist, das heißt für $-1 < q < 0$ und für $0 < q < 1$. Sonst hat sie einen unendlichen Wert.

3. Formel für die endliche geometrische Reihe: $s_n = b \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

   Beweis:
   $$\begin{array}{lll} & b + bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} & = s_n \quad | \cdot q \\ - & \quad bq + bq^2 + \ldots + bq^{n-1} + bq^n & = q \cdot s_n \\ \hline & b \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - bq^n & = s_n \cdot (1-q) \quad | : (1-q) \end{array}$$

   $$s_n = b \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

   b ist der Startwert der geometrischen Folge, die die geometrische Reihe bildet.

4. Formel für die unendliche geometrische Reihe: $s = \frac{b}{1-q}$

   Beweis: Um aus s_n die unendliche Reihe s zu bekommen, müssen wir n gegen ∞ gehen lassen. Dazu müssen wir uns überlegen, was mit q^n passiert für $n \to \infty$.

   $0 < q < 1:$ $q < 1 \mid \cdot q \Rightarrow q^2 < q \mid \cdot q \Rightarrow q^3 < q^2 \mid \cdot q$, usw.

   $\Rightarrow 0 < \ldots < q^4 < q^3 < q^2 < q < 1$

   Die Folge $\langle q^n \rangle$ ist monoton fallend und nähert sich 0 beliebig genau an.

   In der Summenformel erhalten wir also

   $$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} b \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = b \cdot \frac{1-0}{1-q} = \frac{b}{1-q}$$

   $q = 1:$ Summenformel ist nicht direkt anwendbar, da $1 - q = 0$ im Nenner wäre. Was bedeutet es, dass man unendlich oft 1 addiert? Die Summe steigt ewig an, ohne aufzuhören. Somit

hat die Summe keinen endlichen Wert. Sie hat als Summe Unendlich.

$q > 1:$ Addiert man Werte größer als 1 unendlich oft, so kann die Summe nicht endlich sein. Die Summe hat einen unendlich Wert.

$-1 < q < 0:$ Die Folge $\langle q^n \rangle$ ist zwar alternierend, dennoch nähern sich die Folgenglieder immer näher 0 an.
Für die Summenformel haben wir also $s = \frac{b}{1-q}$.

$q = -1:$ $s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - + \ldots =$
$= (1-1) + (1-1) + (1-1) \ldots = 0 + 0 + \ldots = 0$ oder
$= 1 - (1-1) - (1-1) - \ldots = 1 - 0 - 0 - \ldots = 1$
Das heißt wir haben für ein und dieselbe Reihe zwei verschiedene Summen, somit ist die Reihe divergent.

$q < -1:$ Die Folge ist divergent (sie strebt gegen $-\infty$ und gegen ∞). Somit kann auch die daraus entstehende Reihe nicht konvergieren, also einen endlichen Wert haben.

5. (a) $\sum_{i=1}^{9} i \cdot 2^i$

   (b) $3 + 12 + 48 + \ldots = 3(1 + 4 + 16 + \ldots) = 3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 4^i$

6. $\sum_{i=0}^{100} (-1)^i = 1 - 1 + 1 - 1 + - \ldots + 1 = (1-1) + (1-1) + \ldots + 1 =$
$= 0 + 0 + \ldots + 1 = 1$

7. $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{3}{2}$
$s_5 = 4 \cdot \frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^5}{1-\frac{3}{2}} = \frac{211}{4} = 52.75$
$s_{15} = 3495.1511\ldots$

8. $b_6 = b_3 \cdot q^3 \Rightarrow q = -\frac{4}{3} \Rightarrow b_1 = \frac{9}{4}$
$s_{11} = 23.7956\ldots$
$s_n = \frac{9}{4} \cdot \frac{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^n}{1+\frac{4}{3}}$

9. $b_1,\ b_2 = b_1 \cdot q,\ b_3 = b_1 \cdot q^2$

$b_2 + b_3 = b_1(q + q^2) = 28 \Rightarrow b_1 = \frac{28}{q+q^2}$

$b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = b_1^3 \cdot q^3 = 1728 \Rightarrow b_1 = \frac{12}{q}$

$\Rightarrow \frac{28}{q+q^2} = \frac{12}{q} \Rightarrow q = \frac{4}{3}$

$b_1 = 9,\ b_2 = 12,\ b_3 = 16$

$b_1 + b_2 + b_3 = 37$

10. (a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} 0.2^i = 0.2 + 0.04 + \ldots 0.2^{10} = 0.2 \cdot \frac{1 - 0.2^{10}}{1 - 0.2} = 0.24999\ldots$

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} \left(\frac{3}{4}\right)^i = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^8}{1 - \frac{3}{4}} = 2.699661\ldots$

(c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{4}} = 0.3333\ldots$

11. (a) $q = \frac{2}{3} \Rightarrow s = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3$

(b) $q = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow s = \frac{2}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2(\sqrt{2} + 2)$

(c) $q = 2^2 \cdot 3^{-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Rightarrow s = \frac{\frac{4}{81}}{1-\frac{2^2}{3^2}} = \frac{4}{45}$

(d) $q = -0.125 = -\frac{1}{8} \Rightarrow s = \frac{0.64}{1+0.125} = 0.56888\ldots = \frac{128}{225}$

12. $1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{n-1} = \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1-3^n}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 + \ldots + 3^{n-1}}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-3^n}{2}}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - 3^n}{2^n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{3^n}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} - \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 0 + \infty = \infty$$

13. (a) geometrische Reihe mit $q = \frac{2}{x}$. Die Reihe konvergiert für $|\frac{2}{x}| < 1$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $|x| > 2$. Ihre Summe ist $s = \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = \frac{x}{x-2}$

(b) geometrische Reihe mit $q = u$. Die Reihe konvergiert für $|u| < 1$. Ihre Summe ist $s = \frac{2}{1-u}$

(c) geometrische Reihe mit $q = 2x$. Die Reihe konvergiert für $|2x| < 1$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $|x| < \frac{1}{2}$. Ihre Summe ist $s = \frac{-x}{1-2x}$.

14. (a) $\frac{a+a^2+a^3+\ldots}{1+a} = \frac{\frac{a}{1-a}}{1+a} = \frac{a}{1-a^2}$

(b) $(z^2 - 1)(1 + z^2 + z^4 + \ldots) = (z^2 - 1)\frac{1}{1-z^2} = -1$

15. (a) $\frac{2}{1-y} = 2(1+y+y^2+\ldots) = 2+2y+2y^2+\ldots$ sinnvoll für $|y| < 1$

(b) $\frac{2x}{1-2x} = 2x(1+2x+4x^2+\ldots) = 2x+4x^2+8x^3+\ldots$ $|x| < \frac{1}{2}$

(c) $a - \frac{a}{1-2a} = a - a(1+2a+4a^2+\ldots) = -2a^2-4a^3-\ldots$ $|a| < \frac{1}{2}$

(d) $3 \cdot \frac{u}{u^3-1} = -3u(1+u^3+u^6+\ldots) = -3u-3u^4-3u^7-\ldots$ $|u| < 1$