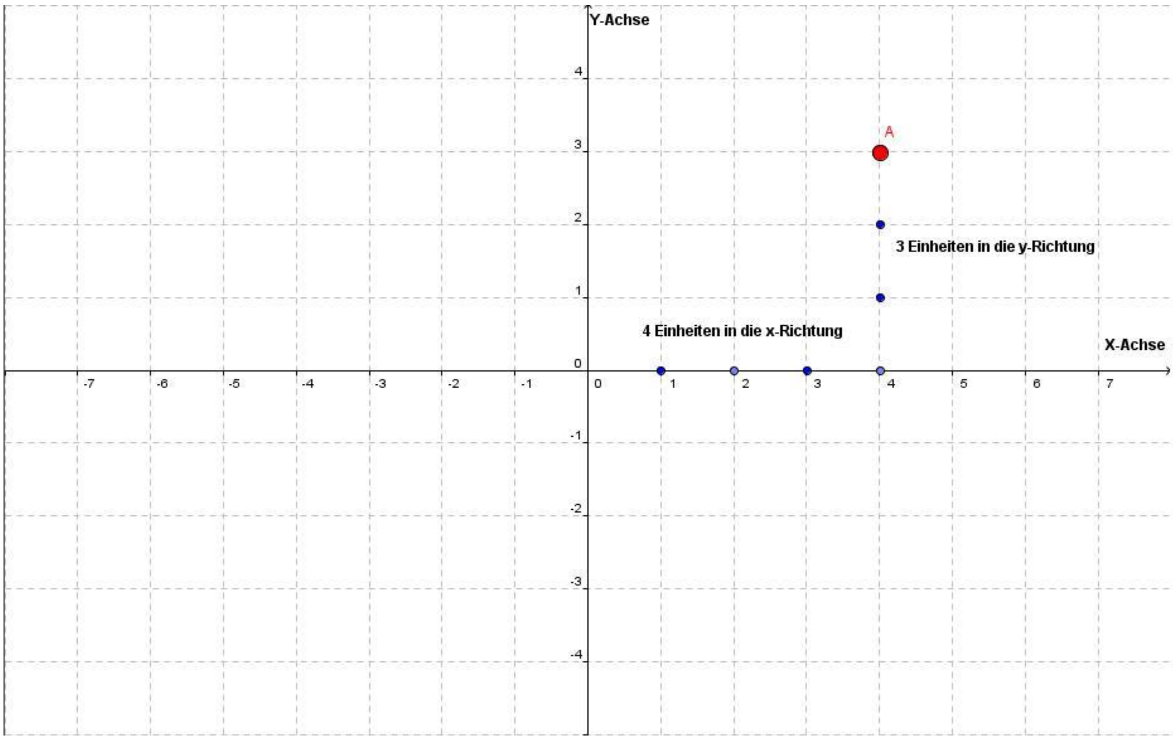
3. $\overrightarrow{\text{Was ist ein Vektor}}$?

3.1. Punkte

Bei der Verwendung des kartesischen Koordinatensystems, kann jeder Punkt in der Ebene durch ein Zahlenpaar repräsentiert werden, den sogenannten "**Koordinaten**". Diese können als Richtung vom Ursprung zum Punkt gesehen werden. Der Ursprung **O** hat die Koordinaten **O(0/0).**

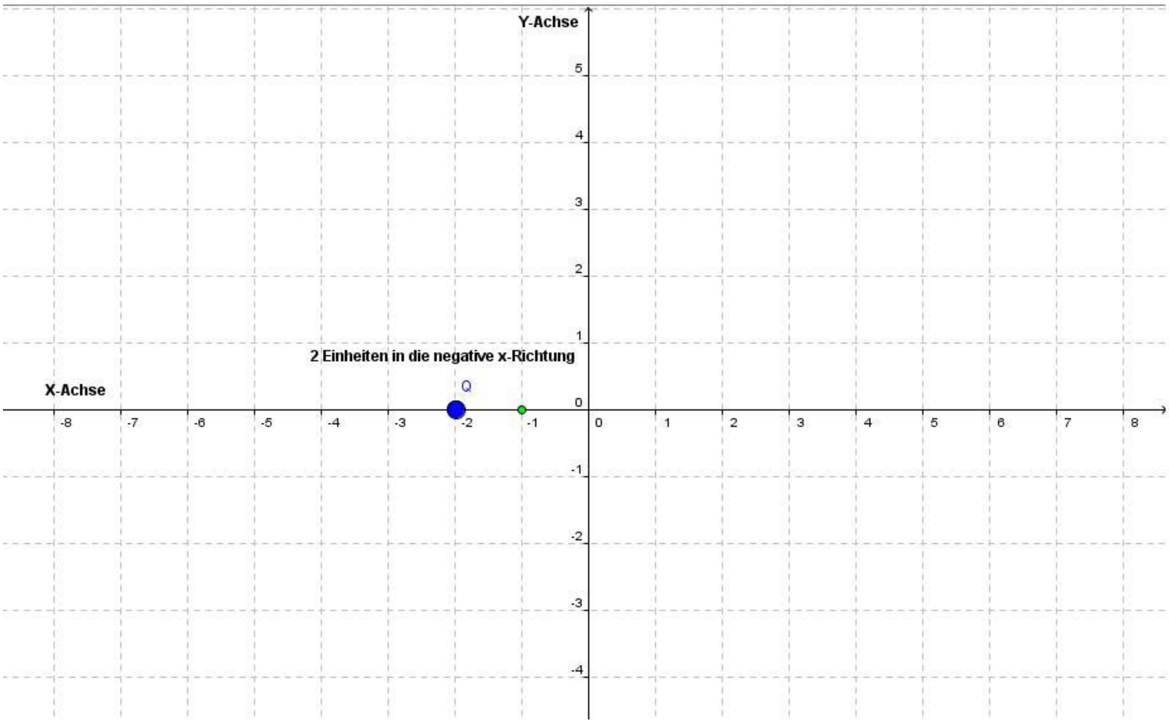
Beispiel 1:

A $\binom{4}{3}$, Um zum Punkt A zu gelangen, gehe zunächst 4 Einheiten in die x-Richtung, dann 3 Einheiten in die y-Richtung.



Beispiel 2:

Q$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$: Um zum Punkt Q zu gelangen, gehe 2 Einheiten in die negative x-Richtung, und 0 Einheiten in die y-Richtung



3.1. Was ist ein Vektor

Ein **Vektor** ist eine Liste von Zahlen. In diesem Kapitel werden wir nur **reelle** Vektoren betrachten, d.h. Listen von reellen Zahlen. Damit können *mehrere* Zahlen zu *einem* mathematischen Objekt zusammengefasst werden − eine praktische Angelegenheit. Ein Vektor kann − ebenso wie eine Zahl − einen Buchstaben oder ein anderes Symbol als Namen bekommen. Um einem Symbol gleich anzusehen, ob es für einen Vektor steht, ist es üblich, dafür eine eigene Schreibweise zu verwenden. Mehrere Konventionen sind gebräuchlich, vor allem: Kennzeichnung durch einen Pfeil, durch Fettdruck oder durch eine Unterstreichung. Je nach der verwendeten Schreibweise bezeichnet dann

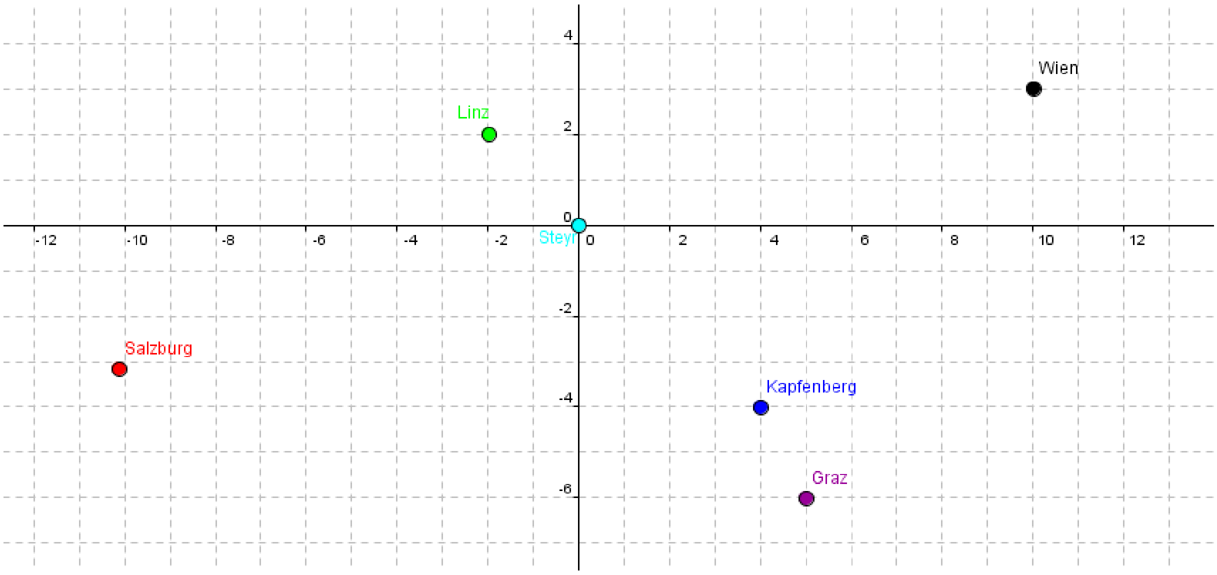
Vektor - Definition

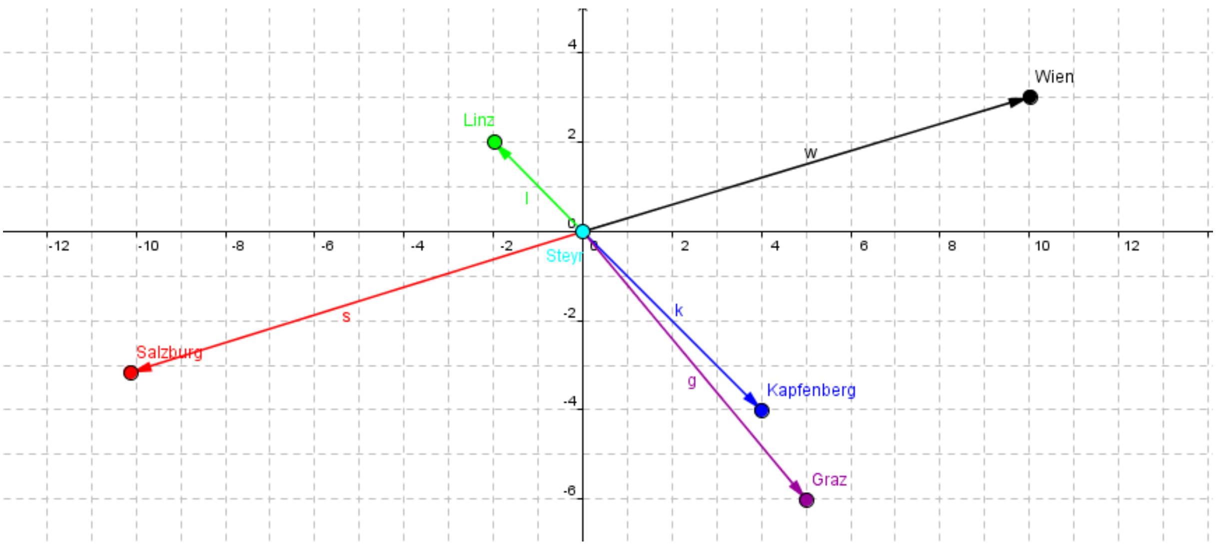
Ein Vektor wird durch drei Angaben festgelegt:

- Betrag (= Länge)
- Richtung
- Orientierung

3.3. Ortspfeile

Peter Ertl hat seine Heimatstadt in Steyr. Er fährt mit seinem Fahrrad eine Österreichrundfahrt in verschiedene Städte. Nach Linz, Graz, Salzburg, Kapfenberg und Wien. Peter fährt immer von seiner Heimatstadt weg. Um zu wissen, wieviele Kilometer er zurücklegen wird, muss er die Entfernung der Zielstadt kennen. Da er den direkten Weg fahren wird, muss er den Kurs des Fahrrades, seine Richtung und Orientierung, wissen. Wien und Salzburg liegen in der selben Richtung (im geometrischen Sinn), von Steyr aus, sind jedoch die Orientierungen zu ihnen entgegengesetzt. **Bemerkung:** Der Begriff Richtung im geometrischen Sinn unterscheidet sich vom Begriff "Richtung" des täglichen Sprachgebrauchs: Jede geometrische Richtung hat zwei "Richtungen" im herkömmlichen Sinn.





Die von Steyr (S) nach Salzburg (S1), Wien (W), Graz (G), Kapfenberg (K) und Linz (L) weisende Pfeile nennt man "Ortspfeile". Wir bezeichnen Ortspfeile durch ihren Anfangs- und Endpunkt oder durch Buchstaben, beides jeweils mit einem Pfeil darüber:

$$\overrightarrow{SG}=\vec{g},\quad \overrightarrow{SL}=\vec{l},\quad \overrightarrow{SW}=\vec{w},\quad \overrightarrow{SK}=\vec{k},\ldots$$

Ein Ortspfeil ist durch seine Länge, seine Richtung und seine Orientierung festgelegt: sein Anfangspunkt liegt stets in O. Auch dem Punkt O wollen wir einen Ortspfeil zuordnen. Dieser wird **Nullpfeil** genannt!

Wir wollen nun einige wichtige Merksätze definieren:

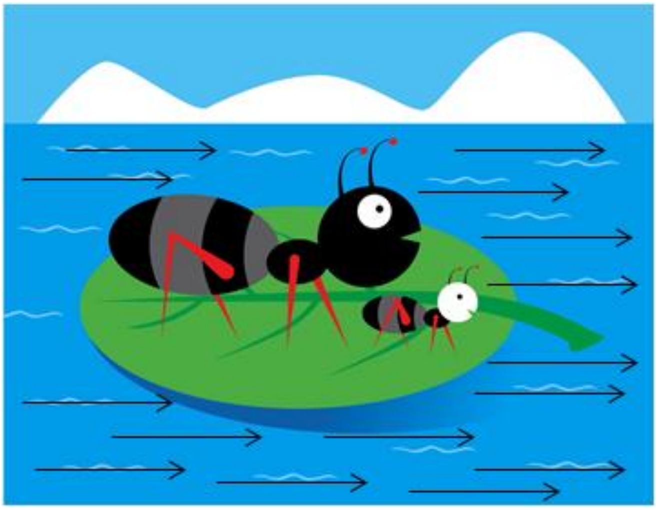
In der Ebene wollen wir Ortspfeilen durch die Koordinaten ihrer Endpunkte festlegen.

Wir definieren:

Unter den Koordinaten eines Ortspfeiles versteht man die Koordinaten seines Endpunktes.

Ortspfeile werden in der Ebene durch geordnete Zahlenpaare und im Raum durch geordnete Zahlentripel dargestellt

3.4. Schiebungspfeile



Wir denken uns einen geradlinigen Fluss. Alle Wasserteilchen bewegen sich in einer Sekunde um die gleiche Weglänge in der gleichen Richtung und mit derselben Orientierung. Die Menge aller gleich langen, gleich gerichteten und gleich orientierten Pfeilen stellt also eine Verschiebung einer Punktmenge dar, diese Pfeile nennt man **Schiebungspfeil**.

Wir wollen nun die Begriffe

"Ortspfeil" und "Schiebungspfeil" nicht mehr voneinander unterscheiden und definieren allgemein:

Die Menge aller Pfeile, die gleich lang, gleich gerichtet und gleich orientiert sind, nennt man einen Vektor. Zu jedem Vektor gehören unendlich viele Pfeile; ein einzelner Pfeil ist nur ein Repräsentant (Vertreter) des Vektors, andererseits ist ein Vektor durch einen seiner Repräsentanten eindeutig bestimmt. Zu jedem Vektor gehört auch genau ein Ortspfeil und umgekehrt.

3.5. Vektoren zwischen zwei Punkten

Für zwei Punkte A (x_A / y_A), B (x_B / y_B) in der Ebene, kann man einen "Vektor" konstruieren, der im Punkt A startet und im Punkt B endet. Die beiden Begriffe "Spitze" und "Schaft" haben wir bereits kennen gelernt. Die Koordinaten des Vektors können berechnet werden, indem man die Koordinaten der beiden Punkte subtrahiert:

$$x_{\overrightarrow{AB}} = x_B - x_A$$

$$y_{\overrightarrow{AB}} = y_B - y_A$$

Die Regel lautet: „Spitze minus Schaft“

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$$

Beispiel: A (1 / 4); B (3 / 5); $\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Zusammenfassung

Die von zwei Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen nennt man Koordinatenebenen.
Die Menge aller Pfeile, die gleich lang, gleich gerichtet, gleich orientiert sind, nennt man Vektoren. Zu jedem Vektor gehören unendlich viele Pfeile. Ein einzelner Pfeil ist nur ein Repräsentant (Vertreter) des Vektors andererseits ist ein Vektor durch einen seiner Repräsentanten eindeutig bestimmt.
Die Koordinaten eines Vektors sind die Koordinaten des zugehörigen Ortspfeils. Diese sind durch die Koordinaten der Spitze des Ortspfeils festgelegt.
Zwei Vektoren sind dann gleich, wenn die entsprechenden Koordinaten gleich sind.