



Reifeprüfung 1986

Dokumentnummer: DX1035
 Fachgebiet: Reifeprüfung Mathematik 1986
 Einsatz: 5HAK (viertes Lernjahr)



(%i1) kill(all)\$

1 1. Aufgabe

Figure 1:

1. Aufgabe:

Für einen bestimmten Artikel ist der Zusammenhang zwischen Absatzmenge x (in 100 Stück) und dem dazugehörigen Grenzerlös durch folgende Zahlenpaare gegeben:

x	2	4	7	9
$E'(x)$	99	78	46,5	25,5

Das sind die gegebenen Daten

(%i1) x:[2,4,7,9];GE:[99,78,46.5,25.5];
 (%o1) [2, 4, 7, 9]
 (%o2) [99, 78, 46.5, 25.5]

Figure 2:

a) Berechnen Sie die Grenzerlösfunktion $E'(x) = a \cdot x + b$ und davon ausgehend Erlös- und Nachfragefunktion!

(%i3) Y:GE /* Grenzerlös GE auf Y umbenennen,
 damit können die Regressionsgleichungen
 leichter verwendet werden */;
 (%o3) [99, 78, 46.5, 25.5]

(%i4) n:length(X) /* den Datenumfang bestimmen */;
 (%o4) 4

Gleichungen für lineare Regression

(%i5) g1:a*sum(X[i]**2,i,1,n)+b*sum(X[i],i,1,n)=sum(X[i]*Y[i],i,1,n);
 (%o5) 22 b+150 a=1065.0

(%i6) g2:a*sum(X[i],i,1,n)+b*n=sum(Y[i],i,1,n);
 (%o6) 4 b+22 a=249.0

Lösung des Gleichungssystems

(%i7) l:solve([g1,g2],[a,b]);
 rat: replaced -1065.0 by -1065/1 = -1065.0
 rat: replaced -249.0 by -249/1 = -249.0
 (%o7) [[a=- $\frac{21}{2}$, b=120]]

Ergebnis: Regressionsgerade für die Grenzerlös

(%i8) $\text{Grenzerloes}:y=a*x+b,1;$

$$(\%o8) y=120-\frac{21x}{2}$$

Grenzerlösfunktion bestimmen

(%i9) $\text{rs}:rhs(\text{Grenzerloes});$

$$(\%o9) 120-\frac{21x}{2}$$

(%i10) $\text{GE}(x):='\text{rs};$

$$(\%o10) \text{GE}(x):=120-\frac{21x}{2}$$

Der Grenzerlös ist die Ableitung vom Erlös, daher muss man in der Umkehrung das Integral bestimmen

(%i11) $\text{E}:integrate(\text{GE}(x),x);$

$$(\%o11) 120x-\frac{21x^2}{4}$$

Die Erlösfunktion

(%i12) $\text{E}(x):='\text{E};$

$$(\%o12) \text{E}(x):=120x-\frac{21x^2}{4}$$

(%i13) $\text{p}:\text{E}/x, \text{expand};$

$$(\%o13) 120-\frac{21x}{4}$$

Die Nachfragefunktion

(%i14) $\text{p}(x):='\text{p};$

$$(\%o14) \text{p}(x):=120-\frac{21x}{4}$$

Figure 3:

b) Die dazugehörige Kostenfunktion lautet:

$$K(x) = -0,5x^2 + 10x + 120$$

Wie groß ist die gewinnmaximale Absatzmenge und der dazugehörige Verkaufspreis?

Die Kostenfunktion ist angegeben

(%i15) $\text{K}:=-0.5*x**2+10*x+120;$

$$(\%o15) -0.5x^2+10x+120$$

```

(%i16) K(x):='K;
(%o16) K(x):=-0.5 x2+10 x+120

(%i17) G(x):=E(x)-K(x);
(%o17) G(x):=E(x)-K(x)

(%i18) ab:diff(G(x),x);
(%o18) 110-9.5 x

(%i19) l:solve(ab=0,x),numer;
rat: replaced -9.5 by -19/2 = -9.5
rat: replaced -9.5 by -19/2 = -9.5
rat: replaced -0.5 by -1/2 = -0.5
rat: replaced -11.5789473684211 by -220/19 = -11.5789473684211
(%o19) [x=11.57894736842105]

```

Gewinnmaximale Absatzmenge (Cournotsche Menge)

```

(%i20) xc:x,l;xc:floor(xc*100+0.5)/100.0;
(%o20) 11.57894736842105
(%o21) 11.58

```

Der Cournotsche Preis ist der zur gewinnmaximalen Menge zugehörige Preis

```

(%i22) pc:p(xc);
(%o22) 59.205

```

```

(%i23) Cournotscher_Punkt:[xc,pc];
(%o23) [11.58, 59.205]

```

Figure 4:

c) Bestimmen Sie die Gewinngrenzen!

```

(%i24) l:solve(G(x)=0,x),numer;
rat: replaced -4.75 by -19/4 = -4.75
rat: replaced -4.75 by -19/4 = -4.75
rat: replaced -0.25 by -1/4 = -0.25
rat: replaced 396.3836525387998 by 442840213/1117201 = 396.3836525388001
rat: replaced 396.3836525387998 by 442840213/1117201 = 396.3836525388001
(%o24) [x=1.147798617399998, x=22.01009611944211]

```

Der kleinere Wert ist die Nutzenschwelle, auch Gewinnschwelle oder Break Even Point

```

(%i25) NS:x,l[1];NS:floor(NS*100+0.5)/100.0;
(%o25) 1.147798617399998
(%o26) 1.15

```

Der größere Wert ist die Nutzengrenze, auch Gewinngrenze

```

(%i27) NG:x,l[2];NG:floor(NG*100+0.5)/100.0;
(%o27) 22.01009611944211
(%o28) 22.01

(%i29) Gewinnzone:[NS,NG];
(%o29) [1.15, 22.01]

```

2 2. Aufgabe

Figure 5:

2. Aufgabe

Für den Ankauf eines Grundstückes und die Errichtung überdachter Abstellplätze für 25 PKW werden folgende Konditionen vereinbart:

Anzahlung \$ 150.000,-- und 16 halbjährliche nachschüssige Raten zu je \$ 15.000,--.

Was gegeben ist

```

--> p:8;i:p/100.0;r:1+i;v:1/r;
anzahlung:150000;hj_rate:15000;pkw:25;n2:16;
(%o30) 8
(%o31) 0.08
(%o32) 1.08
(%o33) 0.92592592592593
(%o34) 150000
(%o35) 15000
(%o36) 25
(%o37) 16

```

einen äquivalenten Zinssatz bestimmen

```

(%i38) g: (1+i2)**2=r;
(%o38) (i2+1)2=1.08

```

```

(%i39) l:solve(g,i2),numer;
rat: replaced -1.08 by -27/25 = -1.08
rat: replaced -1.08 by -27/25 = -1.08
rat: replaced 0.04 by 1/25 = 0.04
rat: replaced 51.96152422706631 by 375850851/7233253 = 51.9615242270663
rat: replaced 51.96152422706631 by 375850851/7233253 = 51.9615242270663
(%o39) [i2=-2.039230484541326, i2=0.039230484541326]

```

```

(%i40) i2:ev(i2,l[2]) /* äquivalenter Halbjahreszinssatz */;
(%o40) 0.039230484541326

```

```

(%i41) r2:1+i2 /* äquivalenter Aufzinsungsfaktor für
           das Halbjahr */;
(%o41) 1.039230484541326

```

```

(%i42) v2:1/r2 /*äquivalenter Abzinsungsfaktor für
           das Halbjahr */;
(%o42) 0.96225044864938

```

Barwert der Aufwendungen

```
(%i43) B:anzahlung+hj_rate*(1-v2**n2)/i2;B:floor(B*100+0.5)/100.0;
(%o43) 325780.8197654556
(%o44) 325780.82
```

```
(%i45) errichtung:B;
(%o45) 325780.82
```

Figure 6:

a) Welche monatliche vorschüssige Benützungsgebühr muß pro Stellplatz verlangt werden, wenn die laufenden monatlichen Betriebskosten S 9.000,-- betragen und ein Jahresbruttogewinn von S 25.000,-- erwirtschaftet werden soll? Man rechnet mit einer Nutzungsdauer von 20 Jahren und setzt Gewinn und Betriebskosten nachschüssig an. ($i = 8\%$)

```
(%i46) n:20;jahresbruttogewinn:25000;monatsbetriebskosten:9000;
(%o46) 20
(%o47) 25000
(%o48) 9000
```

```
(%i49) r12:r**(1/12);v12:1/r12;i12:r12-1;
(%o49) 1.006434030110003
(%o50) 0.99360710198829
(%o51) 0.0064340301100034
```

```
--> aufwendung:errichtung+jahresbruttogewinn*(1-v**n)
    /i+monatsbetriebskosten*(1-v12**((12*n))/i12;
(%o52) 1669934.078004944
```

```
(%i53) aufwendung:floor(aufwendung*100+0.5)/100.0;
(%o53) 1669934.08
```

```
(%i54) d12:i12/r12;
(%o54) 0.0063928980117059
```

```
(%i55) g:aufwendung=12*miete*(1-v12**((12*n))/d12;
(%o55) 1669934.08=1474.358185269433 miete
```

```
(%i56) l:solve(g,miete),numer;
rat: replaced 1669934.08 by 41748352/25 = 1669934.08
rat: replaced -1474.35818526943 by -383698769/260248 = -1474.35818526944
rat: replaced 1669934.08 by 41748352/25 = 1669934.08
rat: replaced -1474.35818526944 by -383698769/260248 = -1474.35818526944
rat: replaced -1.536995481233285E-7 by -1/6506200 = -1.536995481233285E-7
rat: replaced -1132.65154742219 by -337689865/298141 = -1132.65154742219
(%o56) [miete=1132.651547422193]
```

Was man für den Stellplatz verlangen muss
(monatliche Benützungsgebühr)

```
(%i57) miete:ev(miete,l);miete:floor(miete*100+0.5)/100.0;
(%o57) 1132.651547422193
(%o58) 1132.65
```

Figure 7:

b) Für das Zufahrtsrecht zur Anlage müssen an eine Genossenschaft alljährlich nachschüssig S 10.000,-- bezahlt werden. Für die Herabsetzung dieser ewigen Rente wird der Genossenschaft zum teilweisen Ausgleich ein nicht als Bauland ausgewiesenes Grundstück im Wert von S 50.000,-- angeboten. Außerdem soll die Gebühr jeweils am Monatsende entrichtet werden. Wie hoch sind die neuen monatlichen Raten? ($f = 4\%$)

2

```

(%i59) kill(B);
(%o59) done

(%i60) f2:0.04;v:(1-f2)**2;r:1/v;i:r-1;
(%o60) 0.04
(%o61) 0.9216
(%o62) 1.085069444444444
(%o63) 0.085069444444444

(%i64) R:10000;
(%o64) 10000

(%i65) g:R=B*i;
(%o65) 10000=0.085069444444444 B

(%i66) l:solve(g,B),numer;
rat: replaced -0.08506944444444 by -49/576 = -0.08506944444444
rat: replaced -0.08506944444444 by -49/576 = -0.08506944444444
rat: replaced -0.00173611111111 by -1/576 = -0.00173611111111
rat: replaced -117551.020408163 by -5760000/49 = -117551.020408163
(%o66) [B=117551.0204081633]

(%i67) B:ev(B,l);B:floor(B*100+0.5)/100.0;
(%o67) 117551.0204081633
(%o68) 117551.02

--> B:B-50000
/* Einsatz des Grundstückes zur
Minderung der ewigen Rente */;
(%o69) 67551.02

(%i70) R_Jahr:B*i;
(%o70) 5746.527743055554

Neue monatliche Gebühr für das Zufahrtsrecht, wenn das
Grundstück hergegeben wird

(%i71) R_Monat:B*i12;R_Monat:floor(R_Monat*100+0.5)/100.0;
(%o71) 434.6252966414439
(%o72) 434.63

```

□ **3 3. Aufgabe**

Figure 8:

3. Aufgabe

Drei Zuckerfabriken stellen zusammen monatlich 200t Zucker her und zwar in A 40t, in B 70t und in C 90t. Zwei Großhändler in D und E benötigen diese Mengen und zwar 60t und 140t.

Die Transportkosten betragen:

von A nach D	20 GE/t
von B nach D	20 GE/t
von C nach D	30 GE/t

von A nach E	10 GE/t
von B nach E	30 GE/t
von C nach E	50 GE/t

Stellen Sie die Transporttabelle für dieses Problem auf und bestimmen Sie die minimalen Transportkosten!

Anmerkung: es handelt sich um ein geschlossenes klassisches Transportproblem. Man kann solche nach dem Simplexverfahren lösen.

```
--> load(simplex)
/* dieses Unterprogramm wird verwendet */
(%o73)
C:/PROGRA~2/MAXIMA~3.0/share/maxima/5.27.0/share/simplex/simplex.mac
```

Wir verwenden anstelle von A,B,C die Bezeichnungen A1,A2,A3 als Anbieter und anstelle von D und E die Bezeichnungen B1,B2 als Nachfrager.

Das soll das Verständnis des mathematischen Modells erleichtern.

Diese Variablen wollen wir verwenden

Figure 9:

	B1	B2
A1	x_{11}	x_{12}
A2	x_{21}	x_{22}
A3	x_{31}	x_{32}
Liefermengen		

Kostenübersicht je Einheit

Figure 10:

	B1	B2
A1	20	10
A2	20	30
A3	30	50
Lieferkosten		

☐ Nichtnegativitätsbedingungen (es kann keine negativen Liefermengen geben)

→ $u1:x11 \geq 0; u2:x12 \geq 0; u3:x21 \geq 0;$
 $u4:x22 \geq 0; u5:x31 \geq 0; u6:x32 \geq 0;$
 (%o74) $x11 \geq 0$
 (%o75) $x12 \geq 0$
 (%o76) $x21 \geq 0$
 (%o77) $x22 \geq 0$
 (%o78) $x31 \geq 0$
 (%o79) $x32 \geq 0$

☐ Was angeboten wird

(%i80) $u7:x11+x12=40; u8:x21+x22=70; u9:x31+x32=90;$
 (%o80) $x12+x11=40$
 (%o81) $x22+x21=70$
 (%o82) $x32+x31=90$

☐ Was nachgefragt wird

(%i83) $u10:x11+x21+x31=60; u11:x12+x22+x32=140;$
 (%o83) $x31+x21+x11=60$
 (%o84) $x32+x22+x12=140$

☐ Die Kostenfunktion als Zielfunktion

(%i85) $ZF:20*x11+10*x12+20*x21+30*x22+30*x31+50*x32;$
 (%o85) $50x32+30x31+30x22+20x21+10x12+20x11$

☐ Alle Nebenbedingungen

(%i86) $NB:[u1, u2, u3, u4, u5, u6, u7, u8, u9, u10, u11];$
 (%o86) $[x11 \geq 0, x12 \geq 0, x21 \geq 0, x22 \geq 0, x31 \geq 0, x32 \geq 0, x12+x11=40, x22+x21=70, x32+x31=90, x31+x21+x11=60, x32+x22+x12=140]$

☐ Anwendung des Simplexverfahrens

(%i87) $l:minimize_lp(ZF, NB);$
 (%o87) $[5800, [x32=30, x31=60, x22=70, x21=0, x12=40, x11=0]]$

□ 4 4. Aufgabe

Figure 11:

4. Aufgabe

Figure 12:

a) In einem Buch mit 700 Seiten sind 420 Druckfehler.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auf einer gegebenen Seite

- i) genau 2
- ii) weniger als 3
- iii) 2 oder mehr

Druckfehler sind!

Verwenden Sie die Poissonverteilung!

(%i88) $m: 420/700.0;$
(%o88) 0.6

(%i89) $W(k):=m^k/k! * \exp(-m);$
(%o89) $W(k):=\frac{m^k}{k!} \exp(-m)$

--> $W_i:W(2), \text{numer};$
 $W_i:\text{floor}(W_i*1000+0.5)/1000.0;$
(%o90) 0.098786094496925
(%o91) 0.099

--> $W_{ii}:\text{sum}(W(k),k,0,2), \text{numer};$
 $W_{ii}:\text{floor}(W_{ii}*1000+0.5)/1000.0;$
(%o92) 0.97688471224737
(%o93) 0.977

--> $W_{iii}:=1-\text{sum}(W(k),k,0,1), \text{numer};$
 $W_{iii}:\text{floor}(W_{iii}*1000+0.5)/1000.0;$
(%o94) 0.12190138224956
(%o95) 0.122

Figure 13:

b) In einer Fabrik sind 2% der hergestellten Stücke defekt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, daß bei einer Stichprobe von 100 Stück genau 3 defekt sind

Lösen Sie diese Aufgabe mit der Binomialverteilung und approximieren Sie die Lösung mit Hilfe der Poissonverteilung.

Binomialverteilung

(%i96) $p:0.02; n:100;$
(%o96) 0.02
(%o97) 100

(%i98) $W(k):=\text{binomial}(n,k)*p^k*(1-p)^{n-k};$
(%o98) $W(k):=\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

```

(%i99) W:W(3);W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;
(%o99) 0.18227594104652
(%o100) 0.182

```

Poissonverteilung

```

(%i101) m:2;
(%o101) 2

```

```

(%i102) W(k):=m**k/k!*exp(-m);
(%o102) W(k):=  $\frac{m^k}{k!} \exp(-m)$ 

```

```

(%i103) W:W(3),numer;W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;
(%o103) 0.18044704431548
(%o104) 0.18044704431548
(%o105) 0.18

```

Figure 14:

c) 3% aller Menschen sind Linkshänder. Gib die Wahrscheinlichkeit an, daß unter 100 Personen 4 oder mehr Linkshänder sind!

Binomialverteilung

```

(%i106) p:0.03;n:100;
(%o106) 0.03
(%o107) 100

```

```

(%i108) W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);
(%o108) W(k):=  $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ 

```

```

(%i109) W:sum(W(k),k,4,100);W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;
(%o109) 0.35275078953598
(%o110) 0.353

```

Poissonverteilung

```

(%i111) m:3;
(%o111) 3

```

```

(%i112) W(x):=m**k/k!*exp(-m);
(%o112) W(x):=  $\frac{m^k}{k!} \exp(-m)$ 

```

```

(%i113) W:1-sum(W(k),k,0,3),numer;W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;
(%o113) 0.35276811121777
(%o114) 0.353

```