

Reifeprüfung 1986

Dokumentnummer: DX1035
 Fachgebiet: Reifeprüfung Mathematik 1986
 Einsatz: 5HAK (viertes Lernjahr)



```
(%i1) kill(all)$
```

1 1. Aufgabe

Figure 1:

1. Aufgabe:

Für einen bestimmten Artikel ist der Zusammenhang zwischen Absatzmenge x (in 100 Stück) und dem dazugehörigen Grenzerlös durch folgende Zahlenpaare gegeben:

x	2	4	7	9
$E'(x)$	99	78	46,5	25,5

Das sind die gegebenen Daten

```
(%i1) X:[2,4,7,9];GE:[99,78,46.5,25.5];
(%o1) [2,4,7,9]
(%o2) [99,78,46.5,25.5]
```

Figure 2:

a) Berechnen Sie die Grenzerlösfunktion $E'(x) = a \cdot x + b$ und davon ausgehend Erlös- und Nachfragefunktion!

```
(%i3) Y:GE /* Grenzerlös GE auf Y umbenennen,
           damit können die Regressionsgleichungen
           leichter verwendet werden */;
(%o3) [99,78,46.5,25.5]
```

```
(%i4) n:length(X) /* den Datenumfang bestimmen */;
(%o4) 4
```

Gleichungen für lineare Regression

```
(%i5) g1:a*sum(X[i]**2,i,1,n)+b*sum(X[i],i,1,n)=sum(X[i]*Y[i],i,1,n);
(%o5) 22 b+150 a=1065.0
```

```
(%i6) g2:a*sum(X[i],i,1,n)+b*n=sum(Y[i],i,1,n);
(%o6) 4 b+22 a=249.0
```

Lösung des Gleichungssystems

```
(%i7) l:solve([g1,g2],[a,b]);
rat: replaced -1065.0 by -1065/1 = -1065.0
rat: replaced -249.0 by -249/1 = -249.0
(%o7) [[a=-21/2,b=120]]
```

Ergebnis: Regressionsgerade für die Grenzerlös

```
(%i8) Grenzerloes:=a*x+b,l;
```

```
(%o8)  $y = 120 - \frac{21x}{2}$ 
```

Grenzerlösfunktion bestimmen

```
(%i9) rs:=rhs(Grenzerloes);
```

```
(%o9)  $120 - \frac{21x}{2}$ 
```

```
(%i10) GE(x):='rs;
```

```
(%o10)  $GE(x) := 120 - \frac{21x}{2}$ 
```

Der Grenzerlös ist die Ableitung vom Erlös, daher muss man in der Umkehrung das Integral bestimmen

```
(%i11) E:=integrate(GE(x),x);
```

```
(%o11)  $120x - \frac{21x^2}{4}$ 
```

Die Erlösfunktion

```
(%i12) E(x):='E;
```

```
(%o12)  $E(x) := 120x - \frac{21x^2}{4}$ 
```

```
(%i13) p:=E/x,expand;
```

```
(%o13)  $120 - \frac{21x}{4}$ 
```

Die Nachfragefunktion

```
(%i14) p(x):='p;
```

```
(%o14)  $p(x) := 120 - \frac{21x}{4}$ 
```

Figure 3:

b) Die dazugehörige Kostenfunktion lautet:

$$K(x) = -0,5x^2 + 10x + 120$$

Wie groß ist die gewinnmaximale Absatzmenge und der dazugehörige Verkaufspreis?

Die Kostenfunktion ist angegeben

```
(%i15) K:=-0.5*x**2+10*x+120;
```

```
(%o15)  $-0.5x^2 + 10x + 120$ 
```

```
(%i16) K(x):='K;
(%o16) K(x):=-0.5 x^2+10 x+120

(%i17) G(x):=E(x)-K(x);
(%o17) G(x):=E(x)-K(x)

(%i18) ab:diff(G(x),x);
(%o18) 110-9.5 x

(%i19) l:solve(ab=0,x),numer;
rat: replaced -9.5 by -19/2 = -9.5
rat: replaced -9.5 by -19/2 = -9.5
rat: replaced -0.5 by -1/2 = -0.5
rat: replaced -11.5789473684211 by -220/19 = -11.5789473684211
(%o19) [x=11.57894736842105]
```

Gewinnmaximale Absatzmenge (Cournotsche Menge)

```
(%i20) xc:x,l;xc:floor(xc*100+0.5)/100.0;
(%o20) 11.57894736842105
(%o21) 11.58
```

Der Cournotsche Preis ist der zur gewinnmaximalen Menge zugehörige Preis

```
(%i22) pc:p(xc);
(%o22) 59.205
```

```
(%i23) Cournotscher_Punkt:[xc,pc];
(%o23) [11.58, 59.205]
```

Figure 4:

c) Bestimmen Sie die Gewinn Grenzen!

```
(%i24) l:solve(G(x)=0,x),numer;
rat: replaced -4.75 by -19/4 = -4.75
rat: replaced -4.75 by -19/4 = -4.75
rat: replaced -0.25 by -1/4 = -0.25
rat: replaced 396.3836525387998 by 442840213/1117201 = 396.3836525388001
rat: replaced 396.3836525387998 by 442840213/1117201 = 396.3836525388001
(%o24) [x=1.147798617399998,x=22.01009611944211]
```

Der kleinere Wert ist die Nutzenschwelle, auch Gewinnschwelle oder Break Even Point

```
(%i25) NS:x,l[1];NS:floor(NS*100+0.5)/100.0;
(%o25) 1.147798617399998
(%o26) 1.15
```

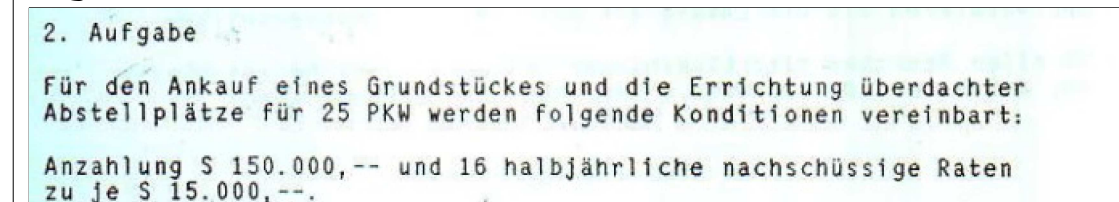
Der größere Wert ist die Nutzengrenze, auch Gewinngrenze

```
(%i27) NG:x,l[2];NG:floor(NG*100+0.5)/100.0;
(%o27) 22.01009611944211
(%o28) 22.01
```

```
(%i29) Gewinnzone:[NS,NG];
(%o29) [1.15, 22.01]
```

2 2. Aufgabe

Figure 5:



2. Aufgabe

Für den Ankauf eines Grundstückes und die Errichtung überdachter Abstellplätze für 25 PKW werden folgende Konditionen vereinbart:

Anzahlung \$ 150.000,-- und 16 halbjährliche nachschüssige Raten zu je \$ 15.000,--.

Was gegeben ist

```
--> p:8;i:p/100.0;r:1+i;v:1/r;
      zahlung:150000;hj_rate:15000;pkw:25;n2:16;
(%o30) 8
(%o31) 0.08
(%o32) 1.08
(%o33) 0.92592592592593
(%o34) 150000
(%o35) 15000
(%o36) 25
(%o37) 16
```

einen äquivalenten Zinssatz bestimmen

```
(%i38) g:(1+i2)**2=r;
(%o38) (i2+1)^2=1.08
```

```
(%i39) l:solve(g,i2),numer;
rat: replaced -1.08 by -27/25 = -1.08
rat: replaced -1.08 by -27/25 = -1.08
rat: replaced 0.04 by 1/25 = 0.04
rat: replaced 51.96152422706631 by 375850851/7233253 = 51.9615242270663
rat: replaced 51.96152422706631 by 375850851/7233253 = 51.9615242270663
(%o39) [i2=-2.039230484541326, i2=0.039230484541326]
```

```
(%i40) i2:ev(i2,l[2]) /* äquivalenter Halbjahreszinssatz */;
(%o40) 0.039230484541326
```

```
(%i41) r2:1+i2 /* äquivalenter Aufzinsungsfaktor für
                das Halbjahr */;
(%o41) 1.039230484541326
```

```
(%i42) v2:1/r2 /*äquivalenter Abzinsungsfaktor für
                das Halbjahr */;
(%o42) 0.96225044864938
```

```
[ Barwert der Aufwendungen
```

```
[ (%i43) B:anzahlung+hj_rate*(1-v2**n2)/i2;B:floor(B*100+0.5)/100.0;
[ (%o43) 325780.8197654556
[ (%o44) 325780.82
```

```
[ (%i45) errichtung:B;
[ (%o45) 325780.82
```

```
[ Figure 6:
```

```
a) Welche monatliche vorschüssige Benützungsgebühr muß pro
Stellplatz verlangt werden, wenn die laufenden monatlichen Betriebs-
kosten S 9.000,-- betragen und ein Jahresbruttogewinn von
S 25.000,-- erwirtschaftet werden soll? Man rechnet mit einer
Nutzungsdauer von 20 Jahren und setzt Gewinn und Betriebskosten
nachschüssig an. ( i = 8%)
```

```
[ (%i46) n:20;jahresbruttogewinn:25000;monatsbetriebskosten:9000;
[ (%o46) 20
[ (%o47) 25000
[ (%o48) 9000
```

```
[ (%i49) r12:r**(1/12);v12:1/r12;i12:r12-1;
[ (%o49) 1.006434030110003
[ (%o50) 0.99360710198829
[ (%o51) 0.0064340301100034
```

```
[ --> aufwendung:errichtung+jahresbruttogewinn*(1-v**n)
[ /i+monatsbetriebskosten*(1-v12**(12*n))/i12;
[ (%o52) 1669934.078004944
```

```
[ (%i53) aufwendung:floor(aufwendung*100+0.5)/100.0;
[ (%o53) 1669934.08
```

```
[ (%i54) d12:i12/r12;
[ (%o54) 0.0063928980117059
```

```
[ (%i55) g:aufwendung=12*miete*(1-v12**(12*n))/d12;
[ (%o55) 1669934.08=1474.358185269433 miete
```

```
[ (%i56) l:solve(g,miete),numer;
rat: replaced 1669934.08 by 41748352/25 = 1669934.08
rat: replaced -1474.35818526943 by -383698769/260248 = -1474.35818526944
rat: replaced 1669934.08 by 41748352/25 = 1669934.08
rat: replaced -1474.35818526944 by -383698769/260248 = -1474.35818526944
rat: replaced -1.536995481233285E-7 by -1/6506200 = -1.536995481233285E-7
rat: replaced -1132.65154742219 by -337689865/298141 = -1132.65154742219
[ (%o56) [miete=1132.651547422193]
```

```
[ Was man für den Stellplatz verlangen muss
[ (monatliche Benützungsgebühr)
```

```
[ (%i57) miete:ev(miete,l);miete:floor(miete*100+0.5)/100.0;
[ (%o57) 1132.651547422193
[ (%o58) 1132.65
```

Figure 7:

b) Für das Zufahrtsrecht zur Anlage müssen an eine Genossenschaft alljährlich nachschüssig \$ 10.000,-- bezahlt werden. Für die Herabsetzung dieser ewigen Rente wird der Genossenschaft zum teilweisen Ausgleich ein nicht als Bauland ausgewiesenes Grundstück im Wert von \$ 50.000,-- angeboten. Außerdem soll die Gebühr jeweils am Monatsende entrichtet werden. Wie hoch sind die neuen monatlichen Raten? ($f = 4\%$)

2

```
(%i59) kill(B);
```

```
(%o59) done
```

```
(%i60) f2:0.04;v:(1-f2)**2;r:1/v;i:r-1;
```

```
(%o60) 0.04
```

```
(%o61) 0.9216
```

```
(%o62) 1.0850694444444444
```

```
(%o63) 0.0850694444444444
```

```
(%i64) R:10000;
```

```
(%o64) 10000
```

```
(%i65) g:R=B*i;
```

```
(%o65) 10000=0.0850694444444444 B
```

```
(%i66) l:solve(g,B),numer;
```

```
rat: replaced -0.0850694444444444 by -49/576 = -0.0850694444444444
```

```
rat: replaced -0.0850694444444444 by -49/576 = -0.0850694444444444
```

```
rat: replaced -0.001736111111111111 by -1/576 = -0.001736111111111111
```

```
rat: replaced -117551.020408163 by -5760000/49 = -117551.020408163
```

```
(%o66) [B=117551.0204081633]
```

```
(%i67) B:ev(B,l);B:floor(B*100+0.5)/100.0;
```

```
(%o67) 117551.0204081633
```

```
(%o68) 117551.02
```

```
--> B:B-50000
```

```
/* Einsatz des Grundstückes zur  
Minderung der ewigen Rente */;
```

```
(%o69) 67551.02
```

```
(%i70) R_Jahr:B*i;
```

```
(%o70) 5746.527743055554
```

Neue monatliche Gebühr für das Zufahrtsrecht, wenn das Grundstück hergegeben wird

```
(%i71) R_Monat:B*i12;R_Monat:floor(R_Monat*100+0.5)/100.0;
```

```
(%o71) 434.6252966414439
```

```
(%o72) 434.63
```

3 3. Aufgabe

Figure 8:

3. Aufgabe

Drei Zuckerfabriken stellen zusammen monatlich 200t Zucker her und zwar in A 40t, in B 70t und in C 90t. Zwei Großhändler in D und E benötigen diese Mengen und zwar 60t und 140t.

Die Transportkosten betragen:

von A nach D	20 GE/t
von B nach D	20 GE/t
von C nach D	30 GE/t
<hr/>	
von A nach E	10 GE/t
von B nach E	30 GE/t
von C nach E	50 GE/t

Stellen Sie die Transporttabelle für dieses Problem auf und bestimmen Sie die minimalen Transportkosten!

Anmerkung: es handelt sich um ein geschlossenes klassisches Transportproblem. Man kann solche nach dem Simplexverfahren lösen.

```
--> load(simplex)
/* dieses Unterprogramm wird verwendet */$
(%o73)
C:/PROGRA~2/MAXIMA~3.0/share/maxima/5.27.0/share/simplex/simplex.mac
```

Wir verwenden anstelle von A,B,C die Bezeichnungen A1,A2,A3 als Anbieter und anstelle von D und E die Bezeichnungen B1,B2 als Nachfrager.

Das soll das Verständnis des mathematischen Modells erleichtern.

Diese Variablen wollen wir verwenden

Figure 9:

	B1	B2
A1	x_{11}	x_{12}
A2	x_{21}	x_{22}
A3	x_{31}	x_{32}

Liefermengen

Kostenübersicht je Einheit

Figure 10:

	B1	B2
A1	20	10
A2	20	30
A3	30	50
Lieferkosten		

Nichtnegativitätsbedingungen (es kann keine negativen Liefermengen geben)

```
--> u1:x11>=0;u2:x12>=0;u3:x21>=0;
      u4:x22>=0;u5:x31>=0;u6:x32>=0;
(%o74) x11>=0
(%o75) x12>=0
(%o76) x21>=0
(%o77) x22>=0
(%o78) x31>=0
(%o79) x32>=0
```

Was angeboten wird

```
(%i80) u7:x11+x12=40;u8:x21+x22=70;u9:x31+x32=90;
(%o80) x12+x11=40
(%o81) x22+x21=70
(%o82) x32+x31=90
```

Was nachgefragt wird

```
(%i83) u10:x11+x21+x31=60;u11:x12+x22+x32=140;
(%o83) x31+x21+x11=60
(%o84) x32+x22+x12=140
```

Die Kostenfunktion als Zielfunktion

```
(%i85) ZF:20*x11+10*x12+20*x21+30*x22+30*x31+50*x32;
(%o85) 50 x32+30 x31+30 x22+20 x21+10 x12+20 x11
```

Alle Nebenbedingungen

```
(%i86) NB:[u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7,u8,u9,u10,u11];
(%o86) [x11>=0,x12>=0,x21>=0,x22>=0,x31>=0,x32>=0,x12+x11=40,x22+
x21=70,x32+x31=90,x31+x21+x11=60,x32+x22+x12=140]
```

Anwendung des Simplexverfahrens

```
(%i87) l:minimize_lp(ZF,NB);
(%o87) [5800,[x32=30,x31=60,x22=70,x21=0,x12=40,x11=0]]
```


4 4. Aufgabe

Figure 11:

4. Aufgabe

Figure 12:

a) In einem Buch mit 700 Seiten sind 420 Druckfehler.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß auf einer gegebenen Seite

- i) genau 2
- ii) weniger als 3
- iii) 2 oder mehr

Druckfehler sind!

Verwenden Sie die Poissonverteilung!

```
(%i88) m:420/700.0;
```

```
(%o88) 0.6
```

```
(%i89) W(k):=m**k/k!*exp(-m);
```

```
(%o89) W(k):= $\frac{m^k}{k!} \exp(-m)$ 
```

```
--> W_i:W(2),numer;
```

```
W_i:floor(W_i*1000+0.5)/1000.0;
```

```
(%o90) 0.098786094496925
```

```
(%o91) 0.099
```

```
--> W_ii:sum(W(k),k,0,2),numer;
```

```
W_ii:floor(W_ii*1000+0.5)/1000.0;
```

```
(%o92) 0.97688471224737
```

```
(%o93) 0.977
```

```
--> W_iii:1-sum(W(k),k,0,1),numer;
```

```
W_iii:floor(W_iii*1000+0.5)/1000.0;
```

```
(%o94) 0.12190138224956
```

```
(%o95) 0.122
```

Figure 13:

b) In einer Fabrik sind 2% der hergestellten Stücke defekt. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, daß bei einer Stichprobe von 100 Stück genau 3 defekt sind

Lösen Sie diese Aufgabe mit der Binomialverteilung und approximieren Sie die Lösung mit Hilfe der Poissonverteilung.

Binomialverteilung

```
(%i96) p:0.02;n:100;
```

```
(%o96) 0.02
```

```
(%o97) 100
```

```
(%i98) W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);
```

```
(%o98) W(k):= $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ 
```

```
(%i99) W:W(3);W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;
(%o99) 0.18227594104652
(%o100) 0.182
```

Poissonverteilung

```
(%i101) m:2;
(%o101) 2

(%i102) W(k):=m**k/k!*exp(-m);
(%o102)  $W(k) := \frac{m^k}{k!} \exp(-m)$ 
```

```
(%i103) W:W(3),numer;W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;
(%o103) 0.18044704431548
(%o104) 0.18044704431548
(%o105) 0.18
```

Figure 14:

c) 3% aller Menschen sind Linkshänder. Gib die Wahrscheinlichkeit an, daß unter 100 Personen 4 oder mehr Linkshänder sind!

Binomialverteilung

```
(%i106) p:0.03;n:100;
(%o106) 0.03
(%o107) 100

(%i108) W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k);
(%o108)  $W(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ 

(%i109) W:sum(W(k),k,4,100);W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;
(%o109) 0.35275078953598
(%o110) 0.353
```

Poissonverteilung

```
(%i111) m:3;
(%o111) 3

(%i112) W(x):=m**k/k!*exp(-m);
(%o112)  $W(x) := \frac{m^k}{k!} \exp(-m)$ 

(%i113) W:1-sum(W(k),k,0,3),numer;W:floor(W*1000+0.5)/1000.0;
(%o113) 0.35276811121777
(%o114) 0.353
```