Polynomfunktion vierten Grades

1 Aufgabenstellung

```
**********************************
Dokumentnummer: D1089
Quelle: Prüfungsdatenbank
             Mecklenburg-Vor-
             pommern, LK 2000
**********************************
```

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f mit der Gleichung
y = f(x) = a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e besitzt die lokalen Extremwerte
E1, E2, E3 und an der Stelle x = 0 eine Tangente t mit der Gleichung
y = 4*x + 5. Gegeben sind E1(-1,1) und E2(2,f(2)).

4.1 Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c, d, e mit Hilfe obiger Bedingungen.

4.2 Bestimmen Sie die Koordinaten von E3 und die aller Wendepunkte des Graphen von f .
Begründen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen hat.
Stellen Sie f grafisch dar.

4.3 Der Graph von f und die Gerade durch die Minimumpunkte begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

4.4 Die Gerade y = 5 schneidet den Graphen von f aus in P1(0,5 und P2(1,5)
in zwei weiteren Punkten.
Berechnen Sie die Abszissen dieser beiden Punkte.

2 Lösung

(%i1) `g(x,y):=y=a*x**4+b*x**3+c*x**2+d*x+e;`

(%o1) $g(x,y):=y=a\,x^4+b\,x^3+c\,x^2+d\,x+e$

(%i2) `f(x):=''rhs(g(x,y));`

(%o2) $f(x):=\mathrm{rhs}(g(x,y))$

Es gibt drei Extremwerte E1(-1,1), E2(2,f(2)), E3

(%i3) `g1:g(-1,1);`

(%o3) $1=e-d+c-b+a$

(%i4) `ab:diff(f(x),x);`

(%o4) $4\,a\,x^3+3\,b\,x^2+2\,c\,x+d$

(%i5) `g3:ab=0,x=-1;`

(%o5) $d-2\,c+3\,b-4\,a=0$

(%i6) `g4:ab=0,x=2;`

(%o6) $d+4\,c+12\,b+32\,a=0$

Für x=0 gibt es eine Tangente y = 4x + 5

(%i7) `g2:ab=4,x=0;`
(%o7) $d=4$

(%i8) `g5:g(0,5);`
(%o8) $5=e$

(%i9) `l:solve([g1,g2,g3,g4,g5],[a,b,c,d,e]);`
(%o9) $[[a=1,b=-2,c=-3,d=4,e=5]]$

(%i10) `g(x,y),l[1];`
(%o10) $y=x^4-2x^3-3x^2+4x+5$

Bestimmen Sie die Koordinaten von E3

(%i11) `f:f(x),l[1];`
(%o11) $x^4-2x^3-3x^2+4x+5$

(%i12) `f;`
(%o12) $x^4-2x^3-3x^2+4x+5$

(%i13) `h(x):=''f;`
(%o13) $\mathrm{h}(x):=x^4-2x^3-3x^2+4x+5$

(%i14) `ab:diff(h(x),x);`
(%o14) $4x^3-6x^2-6x+4$

(%i15) `l:solve(ab=0,x);`
(%o15) $[x=\frac{1}{2},x=-1,x=2]$

(%i16) `h(1/2);`
(%o16) $\frac{97}{16}$

(%i17) `E3:[1/2,h(1/2)];`
(%o17) $[\frac{1}{2},\frac{97}{16}]$

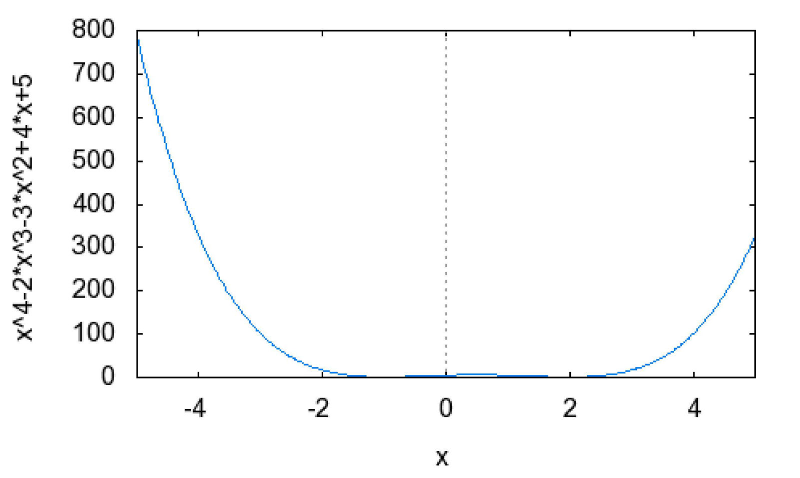
Es gibt keine Nullstellen:

(%i18) `l:realroots(h(x)=0);`
(%o18) $[]$

Grafische Darstellung der Funktion

(%i19) wxplot2d([h(x)], [x,-5,5])$

(%t19)



Bestimmung der Wendepunkte

(%i20) ab2:diff(h(x),x,2);

(%o20) $12\,x^2-12\,x-6$

(%i21) l:realroots(ab2=0);

(%o21) $[x=-\frac{12281775}{33554432}, x=\frac{45836207}{33554432}]$

(%i22) l:l,numer;

(%o22) $[x=-0.36602541804314, x=1.366025418043137]$

(%i23) x1:x,l[1];

(%o23) -0.36602541804314

(%i24) x2:x,l[2];

(%o24) 1.366025418043137

(%i25) y1:h(x1);

(%o25) 3.249999925909632

(%i26) y2:h(x2);

(%o26) 3.249999925909632

Maxima oder Minima?

(%i27) ab2,x=-1;

(%o27) 18

(%i28) ab2,x=1/2;

(%o28) -9

(%i29) ab2,x=2;

(%o29) 18

Flächenberechnung

(%i30) g(x,y):=y=k*x+d;

(%o30) $g(x,y):=y=k\,x+d$

(%i31) g1:g(-1,1);
(%o31) $1=d-k$

(%i32) h(2);
(%o32) 1

(%i33) g2:g(2,1);
(%o33) $1=2\,k+d$

(%i34) solve([g1,g2],[k,d]);
(%o34) $[[k=0,d=1]]$

(%i35) f:-2*3+integrate(h(x),x,-1,2);
(%o35) $\frac{51}{10}$

(%i36) flaeche:f,numer;
(%o36) 5.1

Die Gerade y=5 schneidet in weiteren zwei Punkte. Berechnen Sie die Abszissen.

(%i37) l:realroots(h(x)=5);
(%o37) $[x=-\frac{52397017}{33554432},x=1,x=\frac{85951449}{33554432},x=0]$

(%i38) l:l,numer;
(%o38) $[x=-1.561552792787552,x=1,x=2.561552792787552,x=0]$

(%i39) a1:l[1];
(%o39) $x=-1.561552792787552$

(%i40) a2:l[3];
(%o40) $x=2.561552792787552$