

Binomialverteilung

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkungen	3
Listen und Mengen	3
Beispiele für Ergebnisräume	3
Bernoulliketten	3
Binomialverteilung	3
Aufgabe	3
Graphische Veranschaulichung	4
Eingabe	4
Bestimmung der Produktmenge	4
Bestimmung des Ereignisbaumes	4
Anzeige des Ereignisbaums	4
Interpretation des Ereignisbaumes	5
Graphische Darstellung des Ereignisbaums	6
Zusätzliches Abspeichern des Ereignisbaums	6
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten	6
Berechnung mit Binomialverteilung	7
Eingabe	7
Verarbeitung	7
Formel der Binomialverteilung	7
Wahrscheinlichkeitsverteilung	7
Lösung mit Geogebra	8
Lösung mit Listenverarbeitung	9
Eingabe des Ereignisbaums	9
Länge des Ereignisbaums	9
Liste von Mengen in Liste von Listen umwandeln	9
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten	9
Erklärung der Zusammenhänge	10
Ereignisbaum	10
Listenelemente	10
Ereignis „kein Sechser“	10
Anzahl der Tripel im ersten Listenelement	10
Ereignis „Ein Sechser“	11

Bernoullikette und Binomialverteilung

Anzahl der Tripel im zweiten Listenelement	11
Ereignis „Zwei Sechser“	11
Anzahl der Tripel im dritten Listenelement.....	11
Ereignis „Drei Sechser“	12
Anzahl der Tripel im vierten Listenelement.....	12
Übungsaufgaben	13
Zweimaliges Werfen eines Würfels	13
Dreimaliges Werfen eines Tetraeders	13
Literaturverzeichnis	14

Vorbemerkungen

Listen und Mengen

Das Computer Algebra System Maxima kennt Listen und Mengen. Das kann in der Wahrscheinlichkeitsrechnung interessante Anwendungen ermöglichen. Ausgangspunkt der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind *Ereignisse*, die als Mengen aufgefasst werden und denen Wahrscheinlichkeiten zugeordnet sind; Wahrscheinlichkeiten sind reelle Zahlen zwischen 0 und 1.

Listenverarbeitung ist ein zentrales Thema des CAS Maxima. Listen können in Mengen umgewandelt werden und umgekehrt.

Beispiele für Ergebnisräume

Münze={Kopf, Zahl}
Würfel={1,2,3,4,5,6}

Bernoulliketten

Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment, bei dem nur zwei Elementarereignisse möglich sind. Die Ereignisse selbst sind meistens nicht gemeint, sondern ob ein Ereignis eintritt oder ob es nicht eintritt. Das heißt, ein Münzwurf kann als Bernoulliexperiment betrachtet werden, da es ohnehin nur zwei Elementarereignisse gibt (Kopf, Zahl). Beim Würfeln gilt das nicht, da kann man aber z.B. untersuchen, ob ein Sechser kommt oder ob kein Sechser kommt.

Man spricht von einer Bernoulli-Kette der Länge n oder einem n -stufigen Bernoulli-Experiment, wenn man ein Bernoulli-Experiment mehrmals (n -mal) ausführt und damit einen neuen Ergebnisraum mit Tripeln¹, Paaren o.ä. erzeugt.

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Sie beschreibt die Anzahl der Erfolge in einer Serie von gleichartigen und unabhängigen Versuchen, die jeweils nur zwei mögliche Ergebnisse haben („Erfolg“ oder „Misserfolg“).

Aufgabe

Wir würfeln 3-mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- a) 0 Sechser kommen,
- b) 1 Sechser kommt,
- c) 2 Sechser kommen oder
- d) 3 Sechser kommen?

¹ Ein Tripel ist eine Liste von 3 Elementen (keine Menge, weil es bei einer Menge nicht auf die Reihenfolge ankommt).

Bernoullikette und Binomialverteilung

Graphische Veranschaulichung

Kein Sechser			
Ein Sechser			
Zwei Sechser			
Drei Sechser			

Eingabe

```
(%i1) W:{0,1} /* 0 bedeutet, das Ereignis tritt NICHT ein,  
1 bedeutet, das Ereignis tritt ein */;  
(%o1) {0,1}  
(%i2) P[1]:1/6 /* die Wahrscheinlichkeit für eine Sechser  
bei einmaligem Wurf */;  
(%o2)  $\frac{1}{6}$   
(%i3) P[0]:1-P[1];  
(%o3)  $\frac{5}{6}$ 
```

Verarbeitung

Bestimmung der Produktmenge

```
(%i4) S:cartesian_product(W,W,W);  
(%o4) {[0,0,0],[0,0,1],[0,1,0],[0,1,1],[1,0,0],[1,0,1],  
[1,1,0],[1,1,1]}
```

Bestimmung des Ereignisbaumes

```
(%i5) A(k):=subset(S,lambda([e],is(e[1]+e[2]+e[3]=k)));  
(%o5) A(k):=subset(S,lambda([e],is(e1+e2+e3=k)))  
(%i6) A:makelist(A(k),k,0,3) /* den Ereignisbaum erzeugen */;  
(%o6) {[[0,0,0]],[[0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]],[[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]],[[1,1,1]]}
```

Anzeige des Ereignisbaums

```
(%i7) B:transpose(A);  
(%o7) 
$$\begin{bmatrix} \{[0,0,0]\} \\ \{[0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]\} \\ \{[0,1,1],[1,0,1],[1,1,0]\} \\ \{[1,1,1]\} \end{bmatrix}$$

```

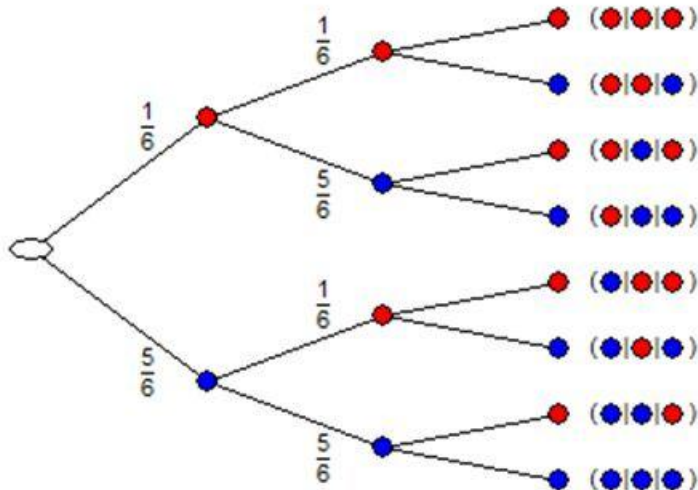
Interpretation des Ereignisbaumes

- Es gibt 1 günstiges Ereignis für „0 Sechser“.
- Es gibt 3 günstige Ereignisse für „1 Sechser“.
- Es gibt 3 günstige Ereignisse für „2 Sechser“.
- Es gibt 1 günstiges Ereignis für „3 Sechser“.

Graphische Darstellung des Ereignisbaums

(in umgekehrter Reihenfolge)

Dreimal würfeln



Zusätzliches Abspeichern des Ereignisbaums

```
(%i8) C:A;  
(%o8) [[ [0,0,0] ], [ [0,0,1], [0,1,0], [1,0,0] ], [ [0,1,1], [1,0,1], [1,1,0] ], [ [1,1,1] ] ]
```

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

```
(%i9) B[1] /* es kommen 0 Sechser */;  
(%o9) [[ [0,0,0] ]]  
(%i10) P[0]*P[0]*P[0];  
(%o10)  $\frac{125}{216}$   
(%i11) B[2] /* es kommt 1 Sechser */;  
(%o11) [[ [0,0,1], [0,1,0], [1,0,0] ]]  
(%i12) P[0]*P[0]*P[1]+P[0]*P[1]*P[0]+P[1]*P[0]*P[0];  
(%o12)  $\frac{25}{72}$   
(%i13) B[3] /* es kommen 2 Sechser */;  
(%o13) [[ [0,1,1], [1,0,1], [1,1,0] ]]  
(%i14) P[0]*P[1]*P[1]+P[1]*P[0]*P[1]+P[1]*P[1]*P[0];  
(%o14)  $\frac{5}{72}$ 
```

Bernoullikette und Binomialverteilung

```
(%i15) B[4] /* es kommen 3 Sechser */;
(%o15) [[1,1,1]]
(%i16) P[1]*P[1]*P[1];
(%o16)  $\frac{1}{216}$ 
```

Berechnung mit Binomialverteilung

Eingabe

```
(%i17) n:3 /* 3mal würfeln */;
(%o17) 3
(%i18) p:P[1] /* a priori Wahrscheinlichkeit
für "es kommt ein Sechser" bei einem Wurf */;
(%o18)  $\frac{1}{6}$ 
```

Verarbeitung

Formel der Binomialverteilung

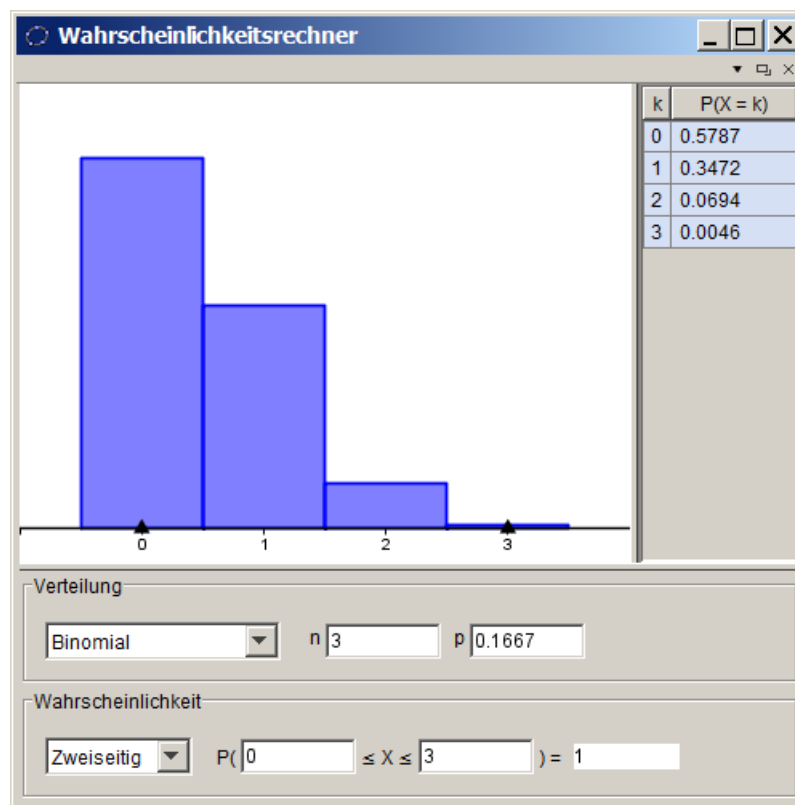
```
(%i19) W(k):=binomial(n,k)*p**k*(1-p)**(n-k)
/* Formel der Binomialverteilung */;
(%o19)  $W(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ 
```

Wahrscheinlichkeitsverteilung

```
(%i20) A:makelist(W(k),k,0,n)
/* Erzeugen der Wahrscheinlichkeitsverteilung */;
(%o20) [ $\frac{125}{216}$ ,  $\frac{25}{72}$ ,  $\frac{5}{72}$ ,  $\frac{1}{216}$ ]
(%i21) B:transpose(A) /* Ausgabe spaltenweise */;
(%o21) 
$$\begin{bmatrix} \frac{125}{216} \\ \frac{25}{72} \\ \frac{5}{72} \\ \frac{1}{216} \end{bmatrix}$$

```

Lösung mit Geogebra



Lösung mit Listenverarbeitung

Eingabe des Ereignisbaums

```
(%i22) C /* der Entscheidungsbaum */;  
(%o22) [[ [0,0,0] ], [ [0,0,1], [0,1,0], [1,0,0] ], [ [0,1,1], [1,0,1], [1,1,0] ], [ [1,1,1] ]]
```

Länge des Ereignisbaums

```
(%i23) m:length(C);  
(%o23) 4
```

Liste von Mengen in Liste von Listen umwandeln

```
(%i24) D:makelist(listify(C[i]),i,1,m);  
(%o24) [[ [0,0,0] ], [ [0,0,1], [0,1,0], [1,0,0] ], [ [0,1,1], [1,0,1], [1,1,0] ], [ [1,1,1] ]]
```

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten

```
(%i25) W:makelist(length(D[l])*prod(P[D[l][1][i]],i,1,3),l,1,m);  
(%o25) [ $\frac{125}{216}$ ,  $\frac{25}{72}$ ,  $\frac{5}{72}$ ,  $\frac{1}{216}$ ]
```

Erklärung der Zusammenhänge

Ereignisbaum

```
(%i26) D;  
(%o26) [[ [0, 0, 0] ], [ [0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 0] ], [ [0, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 0] ], [ [1, 1, 1] ]]
```

Listenelemente

```
(%i27) D[1];  
      D[2];  
      D[3];  
      D[4];  
(%o27) [ [0, 0, 0] ]  
(%o28) [ [0, 0, 1], [0, 1, 0], [1, 0, 0] ]  
(%o29) [ [0, 1, 1], [1, 0, 1], [1, 1, 0] ]  
(%o30) [ [1, 1, 1] ]
```

Ereignis „kein Sechser“

```
(%i31) D[1][1][1];  
      D[1][1][2];  
      D[1][1][3];  
(%o31) 0  
(%o32) 0  
(%o33) 0  
(%i55) P[D[1][1][1]];  
      P[D[1][1][2]];  
      P[D[1][1][3]];  
(%o55)  $\frac{5}{6}$   
(%o56)  $\frac{5}{6}$   
(%o57)  $\frac{5}{6}$ 
```

Anzahl der Tripel im ersten Listenelement

```
(%i43) length(D[1]);  
(%o43) 1  
(%i50) binomial(3, 0);  
(%o50) 1
```

Ereignis „Ein Sechser“

```
(%i34) D[2][1][1];  
      D[2][1][2];  
      D[2][1][3];  
(%o34) 0  
(%o35) 0  
(%o36) 1  
(%i58) P[D[2][1][1]];  
      P[D[2][1][2]];  
      P[D[2][1][3]];  
(%o58)  $\frac{5}{6}$   
(%o59)  $\frac{5}{6}$   
(%o60)  $\frac{1}{6}$ 
```

Anzahl der Tripel im zweiten Listenelement

```
(%i44) length(D[2]);  
(%o44) 3  
(%i51) binomial(3,1);  
(%o51) 3
```

Ereignis „Zwei Sechser“

```
(%i37) D[3][1][1];  
      D[3][1][2];  
      D[3][1][3];  
(%o37) 0  
(%o38) 1  
(%o39) 1  
(%i61) P[D[3][1][1]];  
      P[D[3][1][2]];  
      P[D[3][1][3]];  
(%o61)  $\frac{5}{6}$   
(%o62)  $\frac{1}{6}$   
(%o63)  $\frac{1}{6}$ 
```

Anzahl der Tripel im dritten Listenelement

```
(%i45) length(D[3]);  
(%o45) 3  
(%i52) binomial(3,2);  
(%o52) 3
```

Ereignis „Drei Sechser“

```
(%i40) D[4][1][1];  
        D[4][1][2];  
        D[4][1][3];  
(%o40) 1  
(%o41) 1  
(%o42) 1  
(%i64) P[D[4][1][1]];  
        P[D[4][1][2]];  
        P[D[4][1][3]];  
(%o64)  $\frac{1}{6}$   
(%o65)  $\frac{1}{6}$   
(%o66)  $\frac{1}{6}$ 
```

Anzahl der Tripel im vierten Listenelement

```
(%i46) length(D[4]);  
(%o46) 1  
(%i53) binomial(3,3);  
(%o53) 1
```

Übungsaufgaben

Zweimaliges Werfen eines Würfels

- Wir würfeln 2-mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- a) 0 Sechser kommen,
 - b) 1 Sechser kommt oder
 - c) 2 Sechser kommen?

Dreimaliges Werfen eines Tetraeders

- Wir werfen einen Tetrader 3-mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
- a) 0 Vierer kommen,
 - b) 1 Vierer kommt,
 - c) 2 Vierer kommen oder
 - d) 3 Vierer kommen?

Literaturverzeichnis

1. Maxima, a Computer Algebra System. <http://maxima.sourceforge.net>. [Online]
2. *Stochastikstudio*.
3. **Weilharter, Johann**. Mathematik in der SII mit dem CAS Maxima.
<http://maxima.weilharter.info/documents/bin4.pdf>. [Online] Weilharter Johann, 15.. 3. 2009. [Zitat vom: 12. 1. 2012.]
4. **Weißmüller, Eva**. Bernoulli-Experimente.
<http://mathenexus.zum.de/formelsammlungen/stochastik/S430Bernoulli-Ketten.htm>. [Online] 29. 3. 2005. [Zitat vom: 12. 1. 2012.]
5. Wahrscheinlichkeitstheorie - Wikipedia. [Online] [Zitat vom: 19. 1. 2012.]
<http://de.wikipedia.org/wiki/Wahrscheinlichkeitstheorie>.
6. Binomialverteilung. <http://de.wikipedia.org/wiki/Binomialverteilung>. [Online] [Zitat vom: 12. 1. 2012.]
7. **Fendt, Walter**. Würfelsimulation. <http://www.walter-fendt.de/m14d/wuerfel.htm>. [Online] [Zitat vom: 12. 1. 2012.]