Schnitt zweier Ebenen

eine Ebene ist in **Parameterform** gegeben, die andere Ebene in **Koordinatenform**:

E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ E_2 : 2x –y – z = 8

aus der Ebene E_1 lassen sich 3 Gleichungen ablesen:

x = 3 - 2r +2s $\qquad$ y = 3 + r $\qquad$ z = 1 +3r +s

Diese 3 Gleichungen werden in die Ebene E_2 eingesetzt.

2·(3 - 2r +2s) – (3 + r) – (1 +3r +s) = 8

Klammern auflösen – beachte die Minuszeichen vor den Klammern – alle Vorzeichen in der Klammer drehen sich um!

6 – 4r + 4s – 3 – r + 1 – 3r – s = 8 zusammengefasst ergibt sich entweder r = $\frac{3}{8}s - \frac{1}{2}$

oder $s = \frac{8}{3}r + \frac{4}{3}$

Ich setze r in die Gleichung von E_1 ein (ich könnte ebenso s in E_1einsetzen).

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{8}s - \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die mittlere Klammer wird aufgelöst und entsprechende Terme werden zusammengefasst:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{8}s\right) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 \\ 3-\frac{1}{2} \\ -1-\frac{3}{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{-6}{8}+2 \\ \frac{3}{8}+0 \\ \frac{9}{8}+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2{,}5 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{17}{8} \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Der Richtungsvektor der Schnittgeraden kann zu $\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 17 \end{pmatrix}$ verändert werden.

Schnitt zweier Ebenen

beide Ebenen sind in Parameterform gegeben:

Hier lohnt es sich, eine Ebene in die Koordinatenform umzuwandeln und dann das oben angegebene Verfahren zu verwenden.

Schnitt einer Geraden mit einer Ebene in Parameterform

g : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

Beachte: **die Parameter der Geraden und der Ebene müssen unterschiedlich sein!!!!**

g = E

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Sortiere die Vektoren nach links und die Terme mit den Parametern nach rechts:

$$\begin{pmatrix} 2-4 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

beachte: beim Term mit r werden die Vorzeichen der Vektorkomponenten umgedreht.

Sortiere die Terme mit den Parametern so, dass ein günstiger Vektor am Anfang steht (für das Gaußsche Verfahren) und der Richtungsvektor der Geraden am Ende. Es ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ccc|c} s & t & r & \\ -4 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \quad |\cdot(-3) \\ 0 & 6 & -3 & 0 \quad | + \\ \hline 0 & 0 & -9 & -12 \end{array}$$

Bedingt durch die günstige Wahl des Anfangsvektors muss nur noch die 6 zu Null gemacht werden.

$\Rightarrow$ $-9r = -12$ $\Rightarrow$ $r = \frac{-12}{-9} = \frac{4}{3}$

Dieser Wert für r wird in die Geradengleichung eingesetzt und man erhält den Schnittpunktsvektor und damit die Koordinaten des Schnittpunktes.

$$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{4}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$$

Somit hat der Schnittpunkt die Koordinaten $S(2 \mid \frac{4}{3} \mid 4)$

(Zur **Kontrolle** können noch die Werte für s und t berechnet werden (s = $\frac{1}{6}$ und t = $\frac{2}{3}$).

Setzt man s und t in die Ebenengleichung ein, erhält man ebenfalls der Schnittpunktsvektor und damit die Koordinaten des Schnittpunktes. Es muss sich ebenfalls $S(2 \mid \frac{4}{3} \mid 4)$ ergeben).