**Ableitungsfunktion und graphisches und rechnerisches Differenzieren:**

Definition Differentialquotient:

$$\frac{dy}{dx}=\lim\_{∆x\to 0}\frac{∆y}{∆x}=\lim\_{∆x\to 0}\frac{f\left(x+∆x\right)-f(x\_{0})}{∆x}$$

Definition Ableitungsfunktion:

Gegeben sei die auf einem offenen Intervall $D\_{f}$ definierte reelle Funktion $f:y=f(x)$. Existiert bei jeder Stelle $x\_{0}$ des Definitionsbereiches $D\_{f}$ von $f$ der Differentialquotient, so sagt man: die Funktion $f$ ist **differenzierbar**. Die Funktion $f^{'}:D\_{f}\rightarrow lR, y=f^{'}\left(x\right)$ nennt man **Ableitung von** $f$ **bei** $x\_{0}$.

Die Funktion $f$ nennt man in diesem Zusammenhang die **Stammfunktion** von $f^{'}$.

**Graphisch:**



Beim graphischen Differenzieren legt man zunächst die Tangente an die Kurve durch den Punkt in dem man die Kurve differenzieren möchte. Als nächsten Schritt verschiebe ich die Tangente parallel, so dass sie durch den Punkt (-1,0) geht. So kann ich beim Durchstoßunkt der Geraden durch die y Achse direkt die Steigung der Tangente und somit den Wert der Ableitungsfunktion in diesem Punkt ablesen.

Wenn ich das mit allen Punkten des Definitionsbereiches wiederhole bekomme ich die Ableitungsfunktion.

In diesem Fall reicht es wenn ich die Funktion in zwei Punkten graphisch differenziere, da die Ableitungsfunktion eine Grade ist.

**Rechnerisch:**

Um eine Abbleitungsfunktion zu bestimmen, berechnen wir den Differenzenquotienten an der Stelle $x\_{0}$. $x\_{0}$ ist hier jedoch eine Formvariable.

Wir wollen die Gleichung der Ableitung $f^{'}$ der Funktion $f:lR\rightarrow lR, y=x^{n}$ mit $n\in lN^{\*}$ ermitteln.

$$f^{'}\left(x\_{0}\right)=\lim\_{∆x\to 0}\frac{f\left(x+∆x\right)-f\left(x\_{0}\right)}{∆x}=\lim\_{∆x\to 0}\frac{\left(x\_{0}+∆x\right)^{n}-x\_{0}^{n}}{∆x}$$

Da laut Binomischen Lehrsatz gilt:

$$\left(x\_{0}+∆x\right)^{n}=x\_{0}^{n}+\left(\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right)\*x\_{0}^{n-1}\*∆x+\left(\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right)\*x\_{0}^{n-2}\*(∆x)²+…+(∆x)^{n}$$

folgt:

$$f^{'}\left(x\_{0}\right)=\lim\_{∆x\to 0}=\left(\left(\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right)\*x\_{0}^{n-1}+\left(\begin{matrix}n\\2\end{matrix}\right)\*x\_{0}^{n-2}\*∆x+…+(∆x)^{n-1}\right)$$

Beim Grenzübergang $∆x\rightarrow 0$ streben alle Summanden gegen 0, mit Ausnahme vom Ersten.

Da ja gilt $\left(\begin{matrix}n\\1\end{matrix}\right)=n$ folgt $f^{'}\left(x\_{0}\right)=n\*x\_{0}^{n-1}$

So kann man rechnerisch die Ableitungsfunktion von vielen Stammfunktionen bestimmen.

**Die Ableitung für die Potenzfunktion:**

Die Funktion $f:lR\rightarrow lR, y=x^{n}$ mit $n\in lN^{\*}$ besitzt die Ableitungsfunktion $f^{'}:lR\rightarrow lR, y=n\*x^{n-1}$.

Ableitungsregel: $(x^{n})^{'}=n\*x^{n-1}$

**Ableitung der konstanten Funktion:**

Die Funktion $f:lR\rightarrow lR, y=d$ besitzt die Ableitungsfunktion $f^{'}:lR\rightarrow lR, y=0$.

Ableitungsregel: $(d)^{'}=0$