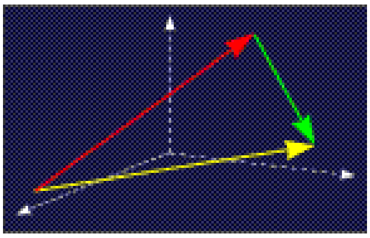
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Fourierreihen: Einführung

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden, ausgehend von der Besprechung trigonometrischer Polynome, die Grundlagen für die Entwicklung einer Funktion in eine Fourierreihe behandelt. Es wird im Skriptum *Fourierreihen: Beispiele* fortgesetzt.

1 Harmonische Schwingungen

Eine **harmonische Schwingung** ist ein zeitlicher Verlauf, der durch eine Funktion vom Typ

$$t \mapsto A \sin(\omega t + \delta) \tag{1.1}$$

beschrieben wird, wobei t die Zeit bezeichnet und $A > 0$, $\omega > 0$ und δ Konstanten sind. Harmonische Schwingungen wurden im Skriptum *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion* genauer vorgestellt. Hier das Wichtigste, kurz zusammengefasst:

- A ist die **Amplitude** der Schwingung. Die Funktion (1.1) nimmt stets Werte zwischen $-A$ und A an.
- $\omega t + \delta$ ist die **Phase** der Schwingung. Formal ist die Phase eine Winkelgröße. Sie kann im Bogenmaß oder im Gradmaß angegeben werden. Wir werden das Bogenmaß bevorzugen. Ein einzelner Schwingungsvorgang wird durchlaufen, wenn die Phase um 2π (die kleinste Periode[1] der Sinusfunktion, entspricht im Gradmaß $360°$) anwächst.
- δ ist die **Anfangsphase** (Phase zum Anfangszeitpunkt $t = 0$), auch **Nullphasenwinkel**, gelegentlich **Phasenverschiebung** genannt.
- ω ist die **Kreisfrequenz** der Schwingung.

[1] Zum Begriff der periodischen Funktion und der Periode siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

- Ebenso wie die Sinusfunktion $x \mapsto \sin(x)$ ist (1.1) eine **periodische** Funktion. Die **Schwingungsdauer** (**Periodendauer**, Dauer eines einzelnen Schwingungsvorgangs, mathematisch ausgedrückt: die kleinste **Periode** der Funktion (1.1)) ist durch
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.2}$$
gegeben.
- Die **Frequenz** der Schwingung (Anzahl der Schwingungsvorgänge pro Zeitintervall) ist gleich
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}\,. \tag{1.3}$$
- (1.1) kann auch durch eine Cosinusfunktion dargestellt werden, denn wegen
$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \tag{1.4}$$
sind die Sinus- und die Cosinusfunktion nur phasenverschobene Versionen voneinander. Daher gilt
$$A\,\sin(\omega\,t + \delta) = A\,\cos\big(\omega\,t + \underbrace{\delta - \frac{\pi}{2}}_{\delta'}\big) = A\,\cos(\omega\,t + \delta'). \tag{1.5}$$

Um eine harmonische Schwingung mit gegebener Kreisfrequenz ω eindeutig festzulegen, müssen in der Darstellung (1.1) A und δ angegeben werden, in der Darstellung (1.5) A und δ'. Eine dritte Darstellung, die besonders für das Thema Fourierreihen bedeutsam ist, ergibt sich aus dem Additionstheorem[2]
$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \tag{1.6}$$
durch die Umformung
$$A\,\sin(\omega\,t + \delta) = \underbrace{A\,\sin(\delta)}_{a}\cos(\omega\,t) + \underbrace{A\,\cos(\delta)}_{b}\sin(\omega\,t). \tag{1.7}$$

Das bedeutet, dass jede harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω auch in der Form[3]
$$t \mapsto a\,\cos(\omega\,t) + b\,\sin(\omega\,t) \tag{1.8}$$
angegeben werden kann, mit zwei Konstanten (Koeffizienten) a und b, die sich aus der Amplitude und der Anfangsphase durch
$$b = A\,\cos(\delta) \tag{1.9}$$
$$a = A\,\sin(\delta) \tag{1.10}$$

[2] Siehe dazu die Skripten *Winkelfunktionen und ihre Graphen* und *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion*.

[3] Die Namen der Konstanten a (als Koeffizient der Cosinusfunktion) und b (als Koeffizient der Sinusfunktion) haben wir hier im Hinblick auf Bezeichnungen in den folgenden Abschnitten gewählt.

errechnen. In formaler Hinsicht sind das die gleichen Beziehungen, mit denen wir die kartesischen Koordinaten eines Punktes in der Ebene durch seine Polarkoordinaten ausdrücken[4]. Ist eine harmonische Schwingung in der Form (1.8) gegeben, so finden wir die Amplitude aus (1.9) und (1.10) in der Form

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{1.11}$$

Um δ zu bestimmen, kann für den Fall $a \neq 0$ und $b \neq 0$ eine der beiden Formeln

$$\delta = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\dfrac{a}{b}\right) & \text{wenn } b > 0 \\ \operatorname{atan}\left(\dfrac{a}{b}\right) + \pi & \text{wenn } b < 0 \end{cases} \tag{1.12}$$

oder

$$\delta = \operatorname{sign}(a)\operatorname{acos}\left(\frac{b}{A}\right) \tag{1.13}$$

verwendet werden, wobei sign die Vorzeichenfunktion ist: $\operatorname{sign}(x) = 1$ für $x > 0$ und $\operatorname{sign}(x) = -1$ für $x < 0$. Formel (1.12) ergibt ein Ergebnis im Bereich $-\frac{\pi}{2} < \delta < \frac{3\pi}{2}$, Formel (1.13) ergibt ein Ergebnis im Bereich $-\pi < \delta < \pi$.

Ist $a = 0$ oder $b = 0$, so verwendet man zur Bestimmung von δ am besten direkt die Vorstellung vom Zusammenhang zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten:

Für $a = 0$ ist

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{wenn } b > 0 \\ \pi & \text{wenn } b < 0. \end{cases}$$

Für $b = 0$ ist

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{wenn } a > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{wenn } a < 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Die Darstellung (1.8) einer harmonischen Schwingung hat aufgrund ihrer *linearen* Struktur Vorteile: Werden die Funktionen $t \mapsto \cos(\omega\, t)$ und $t \mapsto \sin(\omega\, t)$ als „Bausteine“ betrachtet, so erhalten wir aus ihnen alle harmonischen Schwingungen mit Kreisfrequenz ω durch Bilden aller möglichen *Linearkombinationen* der beiden Bausteine, d.h. als Funktionen der Form

$$a \cdot \underbrace{\text{erster Baustein}}_{\cos(\omega\, t)} + b \cdot \underbrace{\text{zweiter Baustein}}_{\sin(\omega\, t)} \tag{1.15}$$

mit beliebigen Konstanten a und b. (Der Spezialfall $a = b = 0$ kann als Grenzfall, bei dem nichts schwingt, zugelassen werden.) Bei Bedarf können dann A und δ mit Hilfe der oben angegebenen Formeln berechnet werden, um die Schwingung in der Form (1.1) darzustellen.

[4] Polarkoordinaten wurden im Skriptum *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion* besprochen. Die hier angegebenen Formeln (1.9) – (1.13) finden Sie ebenfalls dort, wobei es (x, y) anstelle von (b, a) und (r, φ) anstelle von (A, δ) hieß.

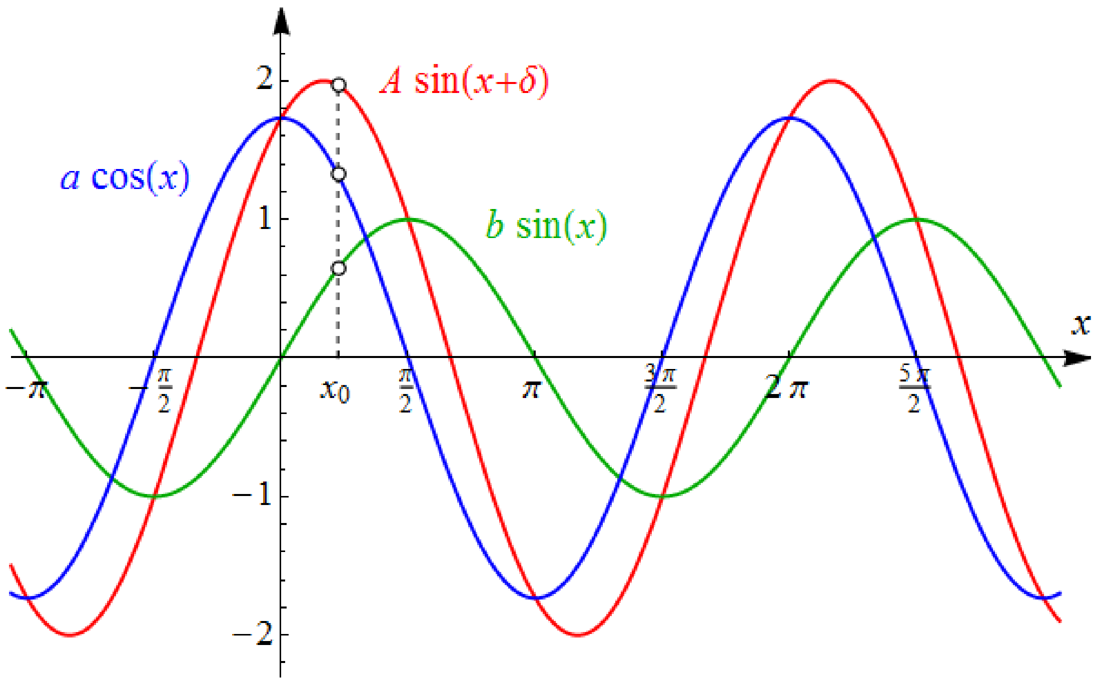


Abbildung 1: Beispiel der Darstellung einer gegebenen Funktion $x \mapsto A \sin(x+\delta)$ in der Form $x \mapsto a\ \cos(x) + b\ \sin(x)$ für $A = 2$ und $\delta = \frac{\pi}{3}$ (entspricht im Gradmaß $60°$). Mit (1.9) – (1.10) ergibt sich $a = \sqrt{3} \approx 1.732$ und $b = 1$. Zusätzlich ist eine Stelle x_0 $(= 0.7)$ markiert, an der man sich leicht klar machen kann, dass die Summe der Funktionswerte der grün und blau dargestellten Funktionen gleich dem Funktionswert der rot dargestellten Funktion ist. (Das gilt natürlich nicht nur für x_0, sondern für jedes $x \in \mathbb{R}$.)

Da es für manche Berechnungen etwas mühsam ist, stets die Kreisfrequenz ω „mitzuschleppen", vereinbaren wir die Abkürzung

$$x = \omega\, t. \tag{1.16}$$

Anstelle von $a\ \cos(\omega\, t) + b\ \sin(\omega\, t)$ schreiben wir dann einfach $a\ \cos(x) + b\ \sin(x)$. Abbildung 1 zeigt ein Beispiel einer Funktion $x \mapsto A \sin(x+\delta)$ und die Summanden $x \mapsto a\ \cos(x)$ und $x \mapsto b\ \sin(x)$ in der Darstellung $A \sin(x+\delta) = a\ \cos(x) + b\ \sin(x)$.

2 Trigonometrische Polynome

Musikinstrumente erzeugen Schwingungen, die als akustische Signale in unser Ohr fallen. Dabei bestimmt die Kreisfrequenz die Tonhöhe. Allerdings sind Töne in der Regel nicht einfach harmonische Schwingungen mit einer fixen Kreisfrequenz, sondern bestehen aus einer **Grundschwingung** mit Kreisfrequenz ω und **Oberschwingungen** mit den Kreisfrequenzen $2\,\omega$ (die „erste Oberschwingung"), $3\,\omega$ (die „zweite Oberschwingung"), $4\,\omega$ (die „dritte Oberschwingung"), usw., wobei die Schwingungen mit den unterschiedlichen Kreisfrequenzen zueinander phasenverschoben sein können. Alle diese Schwingungen *überlagern* einander, d.h. das akustische Signal wird mathematisch als die *Summe* der entsprechenden harmonischen Teilschwingungen dargestellt. Derartige Überlagerungen treten auch in anderen Situationen auf. Beispielsweise kann man Spannungs- und Stromstärkesignale dieser Art durch elektrische Schaltkreise erzeugen. Für jede Kreisfrequenz $n\,\omega$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) verwenden wir die Darstellungsform (1.8). Das durch die Überlagerung dargestellte Signal wird daher durch eine Funktion der Form

$$\begin{aligned} &a_1 \cos(\omega\, t) + b_1 \sin(\omega\, t) + \\ &+ a_2 \cos(2\,\omega\, t) + b_2 \sin(2\,\omega\, t) + \\ &+ a_3 \cos(3\,\omega\, t) + b_3 \sin(3\,\omega\, t) + \dots \end{aligned} \tag{2.1}$$

beschrieben, wobei wir – der allgemeinen Konvention folgend – die zu den Cosinusfunktionen gehörenden Koeffizienten mit a_n und die zu den Sinusfunktionen gehörenden Koeffizienten mit b_n bezeichnet haben. Wir wollen zunächst annehmen, dass wir es nur mit *endlich* vielen Oberschwingungen zu tun haben, d.h. dass die Summe (2.1) nur aus endlich vielen Summanden besteht. Hat die höchste in unserem Signal auftretende Oberschwingung die Kreisfrequenz $k\,\omega$ (für eine natürliche Zahl $k \geq 1$), so schreiben wir es in der Form

$$\begin{aligned} &a_1 \cos(\omega\, t) + b_1 \sin(\omega\, t) + \\ &+ a_2 \cos(2\,\omega\, t) + b_2 \sin(2\,\omega\, t) + \\ &+ \dots \\ &+ a_k \cos(k\,\omega\, t) + b_k \sin(k\,\omega\, t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

oder, ein bisschen komprimierter, mit dem Summensymbol

$$\sum_{n=1}^{k} \big(a_n \cos(n\,\omega\, t) + b_n \sin(n\,\omega\, t)\big) \tag{2.3}$$

an. Um auch einen möglichen zeitunabhängigen Anteil einzuschließen, addieren wir noch eine Konstante C und betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} f(t) = \quad & C + a_1 \cos(\omega\, t) + b_1 \sin(\omega\, t) + \\ & \quad + a_2 \cos(2\,\omega\, t) + b_2 \sin(2\,\omega\, t) + \\ & \quad + \dots \\ & \quad + a_k \cos(k\,\omega\, t) + b_k \sin(k\,\omega\, t) = \\ = C + & \sum_{n=1}^{k} \big(a_n \cos(n\,\omega\, t) + b_n \sin(n\,\omega\, t)\big). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Die Konstanten C, a_n und b_n sollen beliebig sein. Funktionen dieses Typs heißen **trigonometrische Polynome**[5]. Mit unserer Vereinbarung (1.16) können wir stattdessen auch die Funktion

$$\begin{aligned} g(x) = \quad & C + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \\ & \quad + a_2 \cos(2\,x) + b_2 \sin(2\,x) + \\ & \quad + \dots \\ & \quad + a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x) = \\ = C + & \sum_{n=1}^{k} \big(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\big) \end{aligned} \tag{2.5}$$

[5] Trigonometrische Polynome und die Grundidee der Fourierreihen wurden bereits im Skriptum *Der Funktionenzoo* kurz gestreift.

betrachten, die etwas einfacher aufgebaut ist als (2.4). Ist g bekannt, so bekommt man f durch die Beziehung

$$f(t) = g(\omega\, t). \tag{2.6}$$

Wir wollen die Konvention (1.16) und Umrechnungen der Form (2.6) das gesamte Skriptum hindurch aufrechterhalten: Die Variable t kann man als Zeit betrachten (gemessen etwa in Sekunden, ω wird dann in $\mathrm{Sekunde}^{-1}$, kurz s^{-1}, angegeben, die zugehörige Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ ebenfalls in s^{-1}, was man in diesem Fall auch als Hertz, abgekürzt Hz, bezeichnet), während die Variable x dimensionslos ist und als Winkel interpretiert werden kann (bzw. als Phase einer Kreisbewegung, wie im Skriptum *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion* diskutiert). Werden die physikalischen Dimensionen ignoriert, so kann man x ebenfalls als „Zeitvariable" ansehen und sagen, dass g eine Überlagerung von Schwingungen ist, deren Grundschwingung die Kreisfrequenz 1 und die Periodendauer 2π hat. So steht es auch in vielen Lehrbüchern, aber wenn man das tut, sollte man sich darüber im Klaren sein, dass es in physikalischer Hinsicht nicht ganz lupenrein ist[6]. Dass wir die Variable für Funktionen vom Typ (2.4) t nennen und für Funktionen vom Typ (2.5) x, ist mathematisch nicht zwingend, aber angesichts unserer Vereinbarung (1.16) praktisch. Damit sollte immer klar sein, von welchem Funktionstyp die Rede ist.

Die wichtigste Eigenschaft der trigonometrischen Polynome ist ihre **Periodizität**: Jede Funktion der Form (2.4) ist periodisch mit Periode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (kurz: eine T-periodische Funktion), d.h. es gilt

$$f(t+T) = f(t) \qquad \text{für alle } t. \tag{2.7}$$

(Beachten Sie, dass die Funktionen $t \mapsto \sin(n\,\omega\, t)$ und $t \mapsto \cos(n\,\omega\, t)$ die Periode $\frac{T}{n}$ besitzen und damit auch die Periode T.) Jede Funktion der Form (2.5) ist periodisch mit Periode 2π (kurz: eine 2π-periodische Funktion), d.h. es gilt

$$g(x+2\pi) = g(x) \qquad \text{für alle } x. \tag{2.8}$$

(Die Funktionen $x \mapsto \sin(n\, x)$ und $x \mapsto \cos(n\, x)$ besitzen die Periode $\frac{2\pi}{n}$ und damit auch die Periode 2π.) Die Funktionswerte wiederholen sich also immer wieder, sobald t um T bzw. x um 2π angewachsen ist.

Die Bausteine, aus deren Linearkombinationen jede Funktion vom Typ (2.5) bzw. (2.4) besteht, wollen wir die **trigonometrischen Basisfunktionen** (zur entsprechenden Periode) nennen, im Folgenden auch kurz „Basisfunktionen". Wir fassen sie in einer Tabelle zusammen:

Basisfunktion (Periode 2π)	Basisfunktion (Periode T)	zugehöriger Koeffizient
$x \mapsto 1$	$t \mapsto 1$	C
$x \mapsto \cos(n\, x)$	$t \mapsto \cos(n\,\omega\, t)$	a_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$
$x \mapsto \sin(n\, x)$	$t \mapsto \sin(n\,\omega\, t)$	b_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$

[6] Das kann repariert werden, indem man die Symbole ω und T nur für die Maßzahlen bezüglich fix vereinbarter Einheiten verwendet. Die Kreisfrequenz wäre dann beispielsweise nicht ω, sondern $\omega\,\mathrm{Sekunde}^{-1}$, kurz $\omega\,\mathrm{s}^{-1}$, die Periodendauer wäre nicht T, sondern $T\,\mathrm{Sekunden}$.

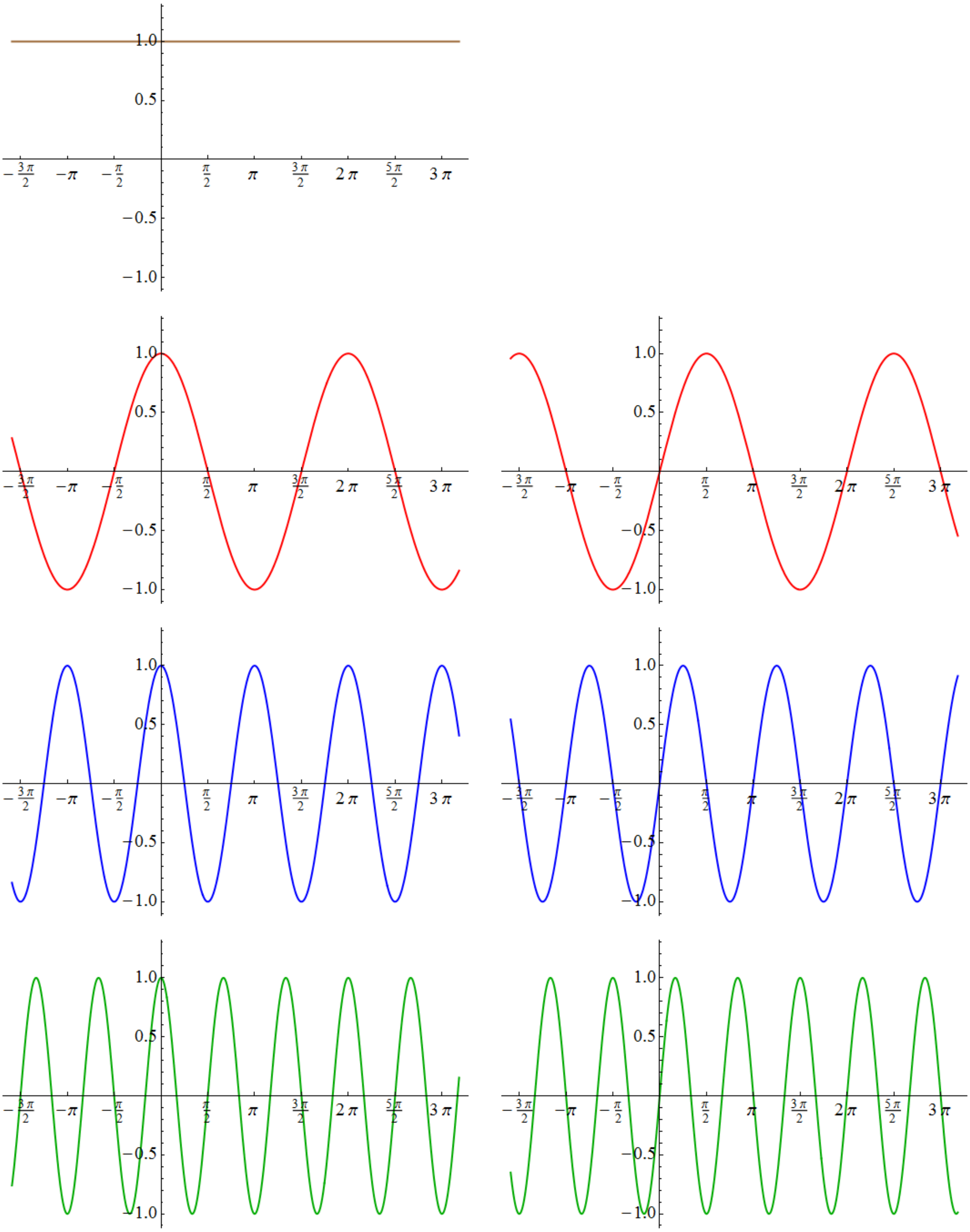


Abbildung 2: Die Graphen der ersten trigonometrischen Basisfunktionen zur Periode 2π, angeordnet nach dem Schema

$$\begin{array}{ll} x \mapsto 1 & \\ x \mapsto \cos(x) & x \mapsto \sin(x) \\ x \mapsto \cos(2x) & x \mapsto \sin(2x) \\ x \mapsto \cos(3x) & x \mapsto \sin(3x). \end{array}$$

Die konstante Basisfunktion entspricht einem zeitunabhängigen Verlauf. Die anderen Basisfunktionen entsprechen harmonischen Schwingungen mit immer kleineren Perioden.

Dabei stehen $x \mapsto 1$ und $t \mapsto 1$ für die konstante Funktion 1. Die Graphen der ersten trigonometrischen Basisfunktionen zur Periode 2π sind in Abbildung 2 wiedergegeben.

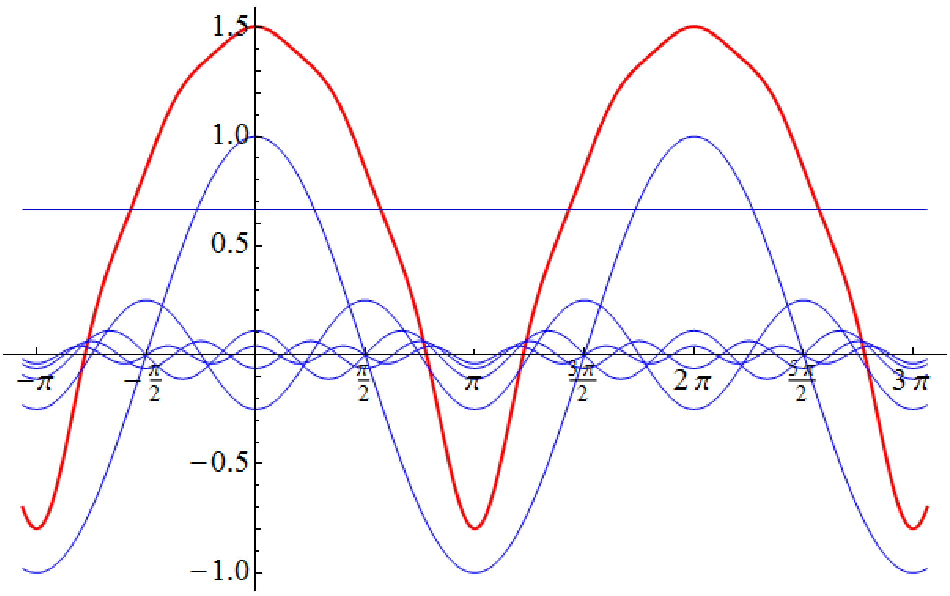


Abbildung 3: In rot ist der Graph des trigonometrischen Polynoms

$$x \mapsto \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{5} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(n\,x)$$

gezeigt, in blau die Graphen der Summanden $x \mapsto \dfrac{2}{3}$ und $x \mapsto \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos(n\,x)$ für $n = 1, \ldots, 5$.

Wichtig: Um von trigonometrischen Polynomen (und später Fourierreihen) sprechen zu können, muss die **Kreisfrequenz der Grundschwingung** bzw. die (**kleinste**) **Periode der Grundschwingung** vorgegeben (und damit bekannt) sein. Ein Signal wird dann stets **in Bezug auf diese Periode** betrachtet (selbst wenn $a_1 = b_1 = 0$ gilt, d.h. wenn die Grundschwingung gar nicht zum Signal (2.4) bzw. (2.5) beiträgt). Die Oberschwingungen haben kleinere Perioden: Die Anteile in (2.4) bzw. (2.5), die zur $(n-1)$-ten Oberschwingung gehören (also die Teilschwingungen mit Kreisfrequenz $n\,\omega$ bzw. n), haben eine Periode von $\frac{T}{n}$ bzw. $\frac{2\pi}{n}$.

Für die Basisfunktionen zur Periode T wurde in der obigen Tabelle – wie wir es auch im Folgenden tun werden – die Abkürzung

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{2.9}$$

verwendet, vgl. (1.2). Die erste Spalte der Tabelle (Basisfunktionen zur Periode 2π) kann als *Spezialfall* der zweiten Spalte (Basisfunktionen zur Periode T) für $T = 2\pi$ (daher $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$) angesehen werden. Umgekehrt kann man die zweite Spalte als *Verallgemeinerung* der ersten Spalte auf Funktionen mit *beliebiger* Periode T ansehen.

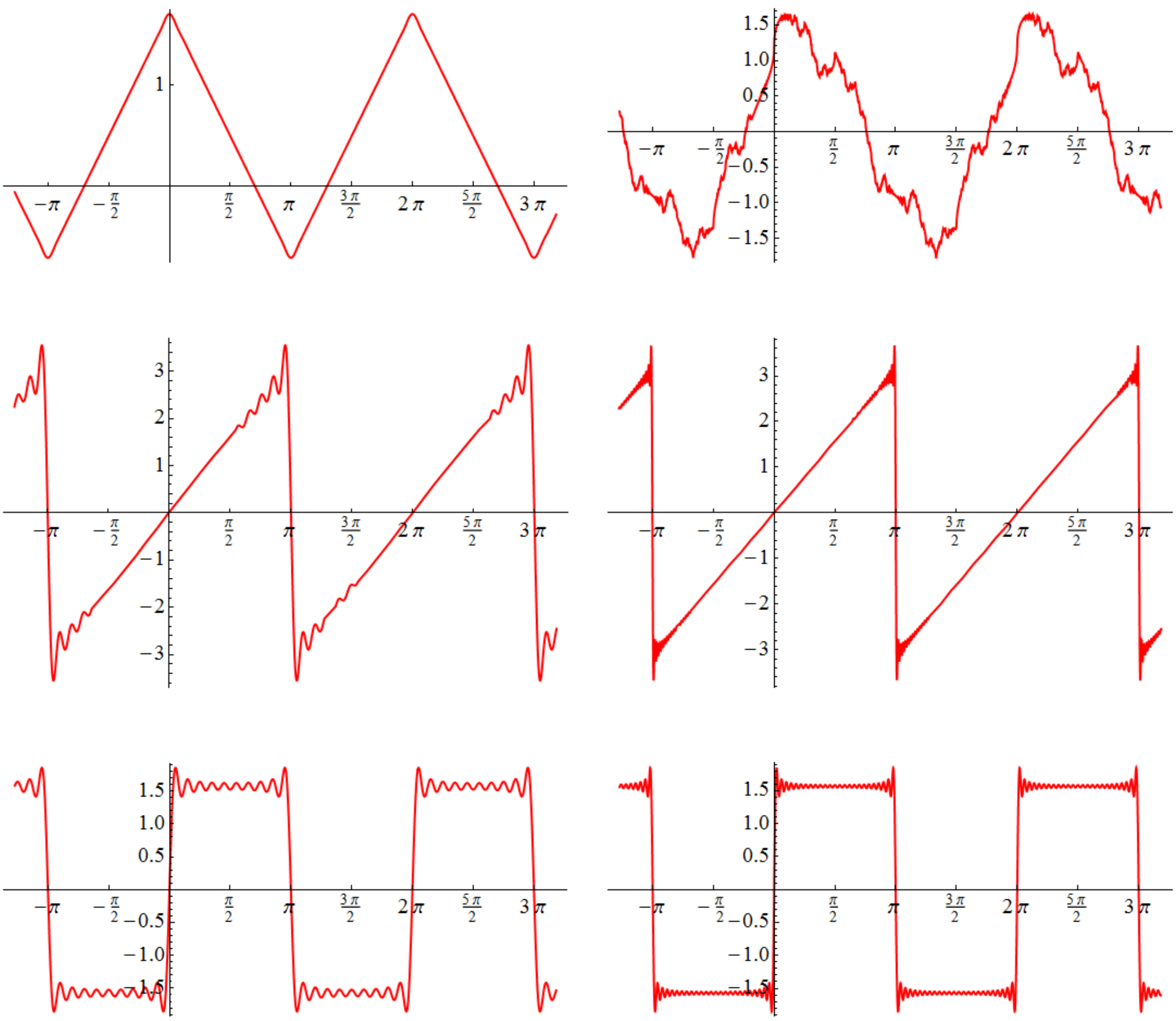


Abbildung 4: Die Graphen einiger trigonometrischer Polynome zur Periode 2π. Die zugehörigen Formeldarstellungen, in der gleichen Anordnung:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\big((2n-1)\,x\big) \qquad \sum_{n=1}^{20}\Big(\frac{1}{n^3}\cos(n\,x)+\frac{1}{n^2}\sin(n^2\,x)\Big)$$

$$\sum_{n=1}^{20}\frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\,x) \qquad \sum_{n=1}^{100}\frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\,x)$$

$$\sum_{n=1}^{20}\frac{1-(-1)^{n}}{n}\sin(n\,x) \qquad \sum_{n=1}^{50}\frac{1-(-1)^{n}}{n}\sin(n\,x)$$

Man erkennt die Vielfalt der möglichen Formen, aber auch, dass die trigonometrischen Basisfunktionen gut zusammenspielen können, um unterschiedliche Wirkungen (Signalformen) zu erzielen, und zwar umso besser, je größer ihre Anzahl ist.

Um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie trigonometrische Polynome – also Signale, die durch Überlagerung der Basisfunktionen zustande kommen – aussehen können, betrachten Sie die Beispiele in den Abbildungen 3 und 4! Sie erinnern nur mehr entfernt an die harmonischen Schwingungen, aus denen sie aufgebaut sind. Jede dieser Einzelschwingungen hat das in Abbildung 2 gezeigte typische Verhalten, aber im Verein können sie einander in bestimmten Variablenbereichen verstärken oder abschwächen und sich so zu ganz unterschiedlichen Signalformen zusammensetzen. In Abbildung 3 ist recht deutlich zu sehen, wie gut sie zusammenspielen können: Von den Oszillationen mit kleiner Periode ist in der Überlagerung praktisch nichts mehr zu sehen.

Jetzt können wir **eine wichtige Frage** stellen, die in etwas allgemeinerer Form auch die Hauptfrage der Theorie der Fourierreihen sein wird: Angenommen, wir wissen von einer Funktion, dass sie ein trigonometrisches Polynom vom Typ (2.4) oder (2.5) ist, kennen aber die Koeffizienten C, a_n und b_n nicht. Wie können wir sie ermitteln?

Um diese Aufgabe zu lösen, müssen wir zunächst ein bisschen Integralrechnung[7] betreiben: Zwischen den trigonometrischen Basisfunktionen bestehen einige bemerkenswerte Beziehungen. Wir konzentrieren uns zunächst auf die Basisfunktionen zur Periode 2π, d.h. auf jene Basisfunktionen, die die trigonometrischen Polynome vom Typ (2.5) aufbauen.

Für beliebige natürliche Zahlen $m, n \geq 1$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = 2\pi \tag{2.10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin(n\,x)\,dx = 0 \tag{2.11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(n\,x)\,dx = 0 \tag{2.12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\,\cos(n\,x)\,dx = 0 \tag{2.13}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{wenn } m = n \\ 0 & \text{wenn } m \neq n \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\,\cos(n\,x)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{wenn } m = n \\ 0 & \text{wenn } m \neq n \end{cases} \tag{2.15}$$

Ein Beweis dieser Formeln würde uns jetzt nur ablenken, daher lagern wir ihn in eine Ergänzung am Ende dieses Skriptums aus. Wichtig ist aber, an ihnen folgendes zu erkennen:

- Wann immer zwei *verschiedene* Basisfunktion miteinander multipliziert werden, ist das Integral dieses Produkts über das Intervall $[-\pi, \pi]$ gleich 0.

[7] Siehe dazu das Skriptum *Integrieren – kurz und bündig*.

- Wenn aber eine Basisfunktion mit sich selbst multipliziert (also quadriert) wird, ist das Integral darüber $\neq 0$. Diese Situation tritt in unseren Formeln an drei Stellen auf: zuerst in (2.10), wenn der Integrand 1 als 1^2 gelesen wird, dann in (2.14) für $m = n$, was nichts anderes bedeutet als

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(n\,x)\,dx = \pi \qquad \text{für alle natürlichen Zahlen } n \geq 1, \tag{2.16}$$

und schließlich in (2.15) für $m = n$, was nichts anderes bedeutet als

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(n\,x)\,dx = \pi \qquad \text{für alle natürlichen Zahlen } n \geq 1. \tag{2.17}$$

Das können wir ausnutzen, um die gesuchten Koeffizienten zu berechnen. Um die Idee zu illustrieren, führen wir sie erst für ein trigonometrisches Polynom vor, das – neben einem konstanten Anteil – nur aus wenigen harmonischen Teilschwingungen besteht. Mit $k = 2$ ist

$$g(x) = C \cdot 1 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2\,x) + b_2 \sin(2\,x), \tag{2.18}$$

wobei die trigonometrischen Basisfunktionen hier blau hervorgehoben sind. Neben der Konstanten C tragen nur die Grundschwingung und die erste Oberschwingung zu $g(x)$ bei. Nun multiplizieren wir $g(x)$ mit einer der Basisfunktionen, sagen wir mit $\cos(2\,x)$ (die wir im Folgenden in rot hervorheben):

$$\begin{aligned} \cos(2\,x)\,g(x) = C\cos(2\,x)\cdot 1 + a_1 \cos(2\,x)\cos(x) + b_1 \cos(2\,x)\sin(x) + \\ + a_2 \underbrace{\cos(2\,x)\cos(2\,x)}_{\cos^2(2\,x)} + b_2 \cos(2\,x)\sin(2\,x). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Hier sehen wir farblich hervorgehoben, wie die Summanden auf der rechten Seite, neben den jeweiligen Koeffizienten, aus Produkten von Basisfunktionen entstehen. Nur ein einziges dieser Produkte ist das Produkt einer Basisfunktion mit sich selbst, also das Quadrat einer Basisfunktion (grün hervorgehoben). Wird diese Summe über das Intervall $[-\pi, \pi]$ integriert, dann ergibt aufgrund der Beziehungen (2.10) – (2.15) nur dieser eine Term einen Beitrag, der $\neq 0$ ist. Gehen wir die Rechnung langsam Schritt für Schritt durch:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\,x)\, g(x)\, dx = \\
&\quad = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\,x) \Big(C \cdot 1 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2\,x) + \qquad (2.20)\\
&\qquad\qquad + b_2 \sin(2\,x) \Big)\, dx = \\
&\quad = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(C \cos(2\,x) \cdot 1 \, + a_1 \cos(2\,x) \cos(x) + b_1 \cos(2\,x) \sin(x) + \\
&\qquad\qquad + a_2 \underbrace{\cos(2\,x) \cos(2\,x)}_{\cos^2(2\,x)} + b_2 \cos(2\,x) \sin(2\,x) \Big)\, dx = \qquad (2.21)\\
&\quad = \underbrace{C \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\,x) \cdot 1\, dx}_{0,\ \text{wegen (2.12)}} + a_1 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\,x) \cos(x)\, dx}_{0,\ \text{wegen (2.15)}} + \\
&\qquad\qquad + b_1 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\,x) \sin(x)\, dx}_{0,\ \text{wegen (2.13)}} + a_2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\,x)^2\, dx}_{\pi,\ \text{wegen (2.15)}} + \qquad (2.22)\\
&\qquad\qquad + b_2 \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\,x) \sin(2\,x)\, dx}_{0,\ \text{wegen (2.13)}} \; = \; \pi\, a_2.
\end{aligned}$$

Im Schritt von (2.21) zu (2.22) wurde die Linearität des Integrals benutzt (d.h. das Integral der Summe wurde in Einzelintegrale aufgespaltet, und die Koeffizienten wurden vor die Integrale gezogen), und in (2.22) wurden wie gekennzeichnet die Beziehungen (2.12), (2.13) und (2.15) benutzt. Das Ergebnis ist $\pi\, a_2$. Alles andere ist weggefallen! Damit ist aber a_2 berechnet:

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(2\,x)\, g(x)\, dx. \qquad (2.23)$$

Um die anderen Koeffizienten zu bekommen, multipliziert man $g(x)$ nacheinander mit den anderen Basisfunktionen und integriert wieder über das Intervall $[-\pi, \pi]$. In jedem Fall gibt nur eines der Produkte von Basisfunktionen einen Beitrag $\neq 0$. Insgesamt bekommt man auf diese Weise alle gesuchten Koeffizienten.

Jetzt machen wir das ganz allgemein für ein trigonometrisches Polynom, das eine *beliebige* Anzahl von harmonischen Teilschwingungen enthält. Die Funktion g ist dann durch (2.5) gegeben, mit einer natürlichen Zahl $k \geq 1$. Zunächst bilden wir das Integral von $g(x)$ (also $1 \cdot g(x)$) über das Intervall $[-\pi, \pi]$, teilen das Integral, genauso wie im vorigen Beispiel von (2.21) zu (2.22), auf die Summanden auf und ziehen die Konstanten vor die Einzelintegrale. Es ergibt sich

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = C \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} dx}_{2\pi} + \sum_{n=1}^{k} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\, dx}_{0} + \sum_{n=1}^{k} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\, dx}_{0} = 2\pi\, C. \qquad (2.24)$$

Damit ist C berechnet:

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx. \tag{2.25}$$

Nun wählen wir ein m zwischen 1 und k (also $1 \leq m \leq k$) und integrieren das Produkt $\cos(m\,x)\, g(x)$ über das Intervall $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\, g(x)\, dx = C \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\, dx}_{0} + \sum_{n=1}^{k} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\, \cos(n\,x)\, dx}_{\pi,\ \text{wenn } n=m,\ \text{ansonsten } 0} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{k} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\, \sin(n\,x)\, dx}_{0} = \pi\, a_m. \tag{2.26}$$

Alle Einzelintegrale sind gleich 0, außer einem einzigen Integral in der ersten Summe. Sehen Sie sich genau an, wie wir diesen einzigen Beitrag, der $\neq 0$ ist, erhalten: In der ersten Summe läuft der Summationsindex n von 1 bis k. Nur für jenen Wert von n, für den $n = m$ ist, ist das Integral von $\cos(m\,x)\, \cos(n\,x)$ (das sich ja dann auf das Integral von $\cos^2(m\,x)$ reduziert) ungleich 0, nämlich π. Damit ist a_m berechnet:

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\, g(x)\, dx. \tag{2.27}$$

Um schließlich b_m für ein m zwischen 1 und k (also $1 \leq m \leq k$) zu berechnen, integrieren wir das Produkt $\sin(m\,x)\, g(x)$ über das Intervall $[-\pi, \pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\, g(x)\, dx = C \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\, dx}_{0} + \sum_{n=1}^{k} a_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\, \cos(n\,x)\, dx +}_{0}$$

$$+ \sum_{n=1}^{k} b_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\, \sin(n\,x)\, dx}_{\pi,\ \text{wenn } n=m,\ \text{ansonsten } 0} = \pi\, b_m. \tag{2.28}$$

Damit ist b_m berechnet:

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\, g(x)\, dx. \tag{2.29}$$

Fertig! Problem gelöst! Die gesuchten Koeffizienten, die wir ab jetzt **Fourierkoeffizienten** nennen, können mit Hilfe der Formeln (2.25), (2.27) und (2.29) als Integrale gewonnen werden.

Damit ist der Themenwechsel, der uns von Betrachtungen über die Darstellung von Schwingungen und trigonometrischen Polynomen zur Integralrechnung geführt hat, und der für Sie vielleicht überraschend gekommen ist, gerechtfertigt. Haben Sie keine Angst vor der Verwendung des Summensymbols und der Art, wie wir mit ihm gerechnet haben! Mit seiner Hilfe lassen sich längere Ausdrücke in kompakter und übersichtlicher Form handhaben.

Nun wären noch zwei Aspekte nachzutragen:

- Wir haben alle Integrale bisher über das Intervall $[-\pi, \pi]$ gebildet. Warum? Weil es ein Intervall ist, dessen Länge gleich 2π ist, also gleich der zugrundegelegten Periode der Grundschwingung (d.h. der kleinsten Periode von $\sin(x)$ und $\cos(x)$). Die „höheren" Basisfunktionen $\sin(n\,x)$ und $\cos(n\,x)$ (für $n \geq 2$) sind, wie bereits erwähnt, ebenfalls periodisch mit Periode 2π, auch wenn 2π nicht die kleinste Periode ist. Daher ist, wie schon in (2.8) angeschrieben, 2π auch eine Periode von g. Soll nun ein Integral einer periodischen Funktion über ein Intervall gebildet werden, dessen Länge gleich einer Periode der Funktion ist, so kommt es nicht darauf an, wo der Anfangspunkt dieses Intervalls liegt:

  Alle Integrale einer L-periodischen Funktion über ein Intervall, dessen Länge gleich L ist, sind gleich. (2.30)

  Das sieht man am einfachsten durch eine Betrachtung des Graphen in einer solchen Situation ein (siehe Abbildung 5). Daher kann man in allen bisher aufgetretenen Inte-

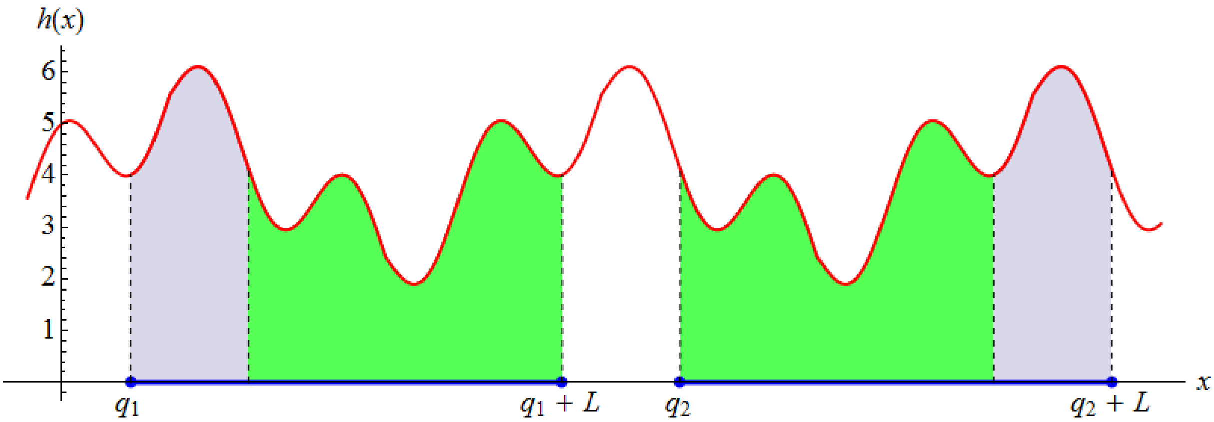


Abbildung 5: Gezeigt ist der Graph einer L-periodischen Funktion h und zwei Intervalle, $[q_1, q_1+L]$ und $[q_2, q_2+L]$, deren Länge gleich der Periode L ist. Das Integral von h über ein Intervall ist der (orientierte) Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse innerhalb der Intervallgrenzen. Die hervorgehobenen Flächenstücke illustrieren, dass das Integral von h über das Intervall $[q_1, q_1+L]$ gleich dem Integral von h über das Intervall $[q_2, q_2+L]$ ist:

$$\int_{q_1}^{q_1+L} h(x)\,dx = \int_{q_2}^{q_2+L} h(x)\,dx \quad \text{für beliebige } q_1 \text{ und } q_2.$$

Dieser Sachverhalt kann auch rechnerisch gezeigt werden, indem die beiden Integrale entsprechend der unterschiedlich gefärbten Flächenstücke jeweils in eine Summe aus zwei Teilintegralen aufgespaltet werden. Eine Variablensubstitution zeigt dann die Gleichheit der blauen Flächenstücke und die Gleichheit der grünen Flächenstücke.

  gralen anstelle des Integrationsintervalls $[-\pi, \pi]$ ein beliebig verschobenes Intervall (also $[q, q + 2\pi]$ für ein beliebiges $q \in \mathbb{R}$) verwenden. Insbesondere wäre auch $[0, 2\pi]$ eine recht schöne Wahl. In manchen Lehrbüchern wird diese alternative Konvention verwendet. Wegen

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\,dx = \int_{0}^{2\pi} h(x)\,dx \quad \text{für } h \text{ periodisch mit Periode } 2\pi \tag{2.31}$$

haben die Integrale, die Sie dort sehen, genau die gleichen Werte wie jene, die wir hier aufgeschrieben haben. Mit anderen Worten: In (2.10) – (2.15), (2.25), (2.27) und (2.29) kann $\int_{-\pi}^{\pi}$ durch $\int_{0}^{2\pi}$ ersetzt werden.

- Der Faktor vor dem Integral in (2.25) ist $\frac{1}{2\pi}$, der Faktor vor den Integralen in (2.27) und (2.29) ist $\frac{1}{\pi}$. Um diese kleine Unschönheit auszugleichen und Formeln für die Fourierkoeffizienten zu bekommen, die einander möglichst ähnlich sind, definiert man $a_0 = 2\,C$, schreibt also
$$C = \frac{a_0}{2} \tag{2.32}$$
und verwendet a_0 anstelle von C, um den konstanten Anteil eines trigonometrischen Polynoms zu charakterisieren. Wieso bezeichnet man diese Konstante ausgerechnet mit a_0 und nicht mit b_0 oder irgendwie anders? Weil $\cos(0) = 1$ ist und die konstante Basisfunktion $x \mapsto 1$ daher als Spezialfall der Funktion $x \mapsto \cos(n\,x)$ für $n = 0$ angesehen werden kann. So gesehen gehört die konstante Basisfunktion $x \mapsto 1$ eher zu den Cosinusfunktionen als zu den Sinusfunktionen und bekommt auch denselben Buchstaben.

Mit der soeben getroffenen Vereinbarung, a_0 anstelle von C zu verwenden, sehen unsere bisherigen Ergebnisse so aus:

Wird das trigonometrische Polynom (2.5) in der Form

$$\begin{aligned} g(x) = \quad & \frac{a_0}{2} + a_1\cos(x) + b_1\sin(x) + \\ & + a_2\cos(2\,x) + b_2\sin(2\,x) + \\ & + \ldots \\ & + a_k\cos(k\,x) + b_k\sin(k\,x) = \\ = & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}\big(a_n\cos(n\,x) + b_n\sin(n\,x)\big) \end{aligned} \tag{2.33}$$

geschrieben, so erfüllen die Fourierkoeffizienten die Beziehungen

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx \tag{2.34}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\,g(x)\,dx \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots, k \tag{2.35}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\,g(x)\,dx \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots, k, \tag{2.36}$$

wobei wir den Index m in (2.27) und (2.29), der aufgrund der Art der Herleitung anders als n geheißen hat, wieder n genannt haben. Die Formeln (2.33) – (2.36) werden – mit der Modifikation, dass die Beschränkung auf endlich viele Teilschwingungen wegfällt – auch die zentralen Formeln der Theorie der Fourierreihen sein. Bitte merken Sie sie sich gut!

Anmerkung: Theoretisch könnte man sich die Formel (2.34) sparen, indem in (2.35) auch $n = 0$ zugelassen wird. In der Regel kann man aber a_0 nicht aus dem Ergebnis für a_n gewinnen, indem einfach $n = 0$ gesetzt wird, da dann ein undefinierter Ausdruck wie $\frac{0}{0}$ auftritt. Daher muss man in praktisch allen konkreten Beispielen a_0 und a_n für $n \geq 1$ separat berechnen. Aus diesem Grund haben wir die Fälle $n = 0$ und $n \geq 1$ getrennt angeschrieben und werden das auch im Folgenden so machen.

Um die entsprechenden Berechnungsvorschriften für die Fourierkoeffizienten eines trigonometrischen Polynoms vom Typ (2.4) zu erhalten, das wir nun in der Form

$$\begin{aligned} f(t) = \quad & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega\, t) + b_1 \sin(\omega\, t) + \\ & + a_2 \cos(2\,\omega\, t) + b_2 \sin(2\,\omega\, t) + \\ & + \ldots \\ & + a_k \cos(k\,\omega\, t) + b_k \sin(k\,\omega\, t) = \\ = \frac{a_0}{2} & + \sum_{n=1}^{k} \big(a_n \cos(n\,\omega\, t) + b_n \sin(n\,\omega\, t)\big) \end{aligned} \tag{2.37}$$

anschreiben, könnten wir alles in analoger Weise auch für die Funktion f wiederholen. Das ist aber aufgrund der Beziehung (2.6) gar nicht notwendig! Mit ihrer Hilfe können wir die Koeffizienten direkt aus (2.34)–(2.36) gewinnen, indem wir die Substitution $x = \omega\, t$ der Integrationsvariable[8] durchführen. Dazu wird x durch $\omega\, t$ ersetzt, dx durch $\omega\, dt$, und es werden die Grenzen entsprechend umgerechnet:

$$t_{\text{untere Grenze}} = \frac{1}{\omega}\, x_{\text{untere Grenze}} = -\frac{\pi}{\omega} \tag{2.38}$$

$$t_{\text{obere Grenze}} = \frac{1}{\omega}\, x_{\text{obere Grenze}} = \frac{\pi}{\omega}\,. \tag{2.39}$$

Für a_0 sieht die Rechnung so aus:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \underbrace{g(\omega\, t)}_{f(t)}\, \omega\, dt = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} f(t)\, dt\,. \tag{2.40}$$

Üblicherweise wird diese Formel durch die Periode T ausgedrückt, also verwenden wir (2.9) in der Form $\frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi/T} = \frac{T}{2}$ und erhalten

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, dt\,. \tag{2.41}$$

In völlig analoger Weise (mit $\cos(n\, x) = \cos(n\,\omega\, t)$ und $\sin(n\, x) = \sin(n\,\omega\, t)$) berechnen wir auch die anderen Fourierkoeffizienten:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\,\omega\, t)\, f(t)\, dt \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots, k \tag{2.42}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\,\omega\, t)\, f(t)\, dt \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.43}$$

[8] Die Substitutionsmethode wird im Skriptum *Integrieren – kurz und bündig* erklärt.

Die Formeln (2.37) und (2.41) – (2.43) verallgemeinern (2.33) – (2.36) auf trigonometrische Polynome zu einer beliebigen Periode T. Zur Kontrolle können Sie in (2.41) – (2.43) $T = 2\pi$ und $\omega = 1$ setzen und erhalten daraus (nach der Umbenennung von f in g und t in x) (2.34) – (2.36) als Spezialfall.

Auch in den Formeln (2.41) – (2.43) wird über ein Intervall integriert, dessen Länge gleich der zugrundegelegten Periode ist. Wir erinnern uns an (2.30) und das Argument in Abbildung 5: Das Integrationsintervall kann beliebig verschoben werden. Insbesondere ist $[0, T]$ eine schöne, zu $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ alternative Wahl, denn analog zu (2.31) gilt

$$\int_{-T/2}^{T/2} h(t)\,dt = \int_0^T h(t)\,dt \quad \text{für } h \text{ periodisch mit Periode } T\,. \tag{2.44}$$

In manchen Lehrbüchern finden Sie die Formeln (2.41) – (2.43) mit dieser alternativen Konvention angeschrieben, d.h. mit $\int_0^T$ anstelle von $\int_{-T/2}^{T/2}$.

Fassen wir die bisherigen Erkenntnisse über trigonometrische Polynome vom Typ (2.4) zusammen:

Wird das trigonometrische Polynom (2.4) in der Form

$$\begin{aligned} f(t) = \quad & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega\, t) + b_1 \sin(\omega\, t) + \\ & + a_2 \cos(2\,\omega\, t) + b_2 \sin(2\,\omega\, t) + \\ & + \ldots \\ & + a_k \cos(k\,\omega\, t) + b_k \sin(k\,\omega\, t) = \\ = \frac{a_0}{2} & + \sum_{n=1}^{k} \big(a_n \cos(n\,\omega\, t) + b_n \sin(n\,\omega\, t)\big) \end{aligned} \tag{2.45}$$

geschrieben, so erfüllen die Fourierkoeffizienten die Beziehungen

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \tag{2.46}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\,\omega\, t)\, f(t)\,dt \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots, k \tag{2.47}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\,\omega\, t)\, f(t)\,dt \qquad \text{für } n = 1, 2, \ldots, k. \tag{2.48}$$

Damit wissen wir genug über trigonometrische Polynome, um uns den Fourierreihen zuwenden zu können. Die Formeln, die wir bisher entwickelt haben, werden wir weiterhin anwenden können, aber in einem viel umfassenderen Zusammenhang.

3 Fourierreihen

Die Formeln (2.34) – (2.36) legen die Frage nahe, was eigentlich passiert, wenn man für g eine Funktion einsetzt, die zwar 2π-periodisch, aber *kein* trigonometrisches Polynom ist. Für jedes endliche k ist die Summe in (2.33) dann ein trigonometrisches Polynom, kann also nicht mit g übereinstimmen. Aber könnte man nicht die Beschränkung, nur Summen mit *endlich* vielen Summanden zu betrachten, fallen lassen? Gibt es so etwas wie „unendliche" trigonometrische Polynome? Was ergibt sich, wenn man statt einer endlichen Summe eine „unendliche Summe", also so etwas wie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\big) \tag{3.1}$$

oder

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t)\big) \tag{3.2}$$

zulässt?

Kleiner **Exkurs** über den Begriff der *Reihe*: Eine **Reihe** ist ein formaler Ausdruck der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + \ldots \tag{3.3}$$

mit beliebigen Zahlen d_n, den *Gliedern* der Reihe. Mathematisch ist zunächst nicht klar, was er bezeichnen soll, denn die Addition ist ja nur für zwei Zahlen und damit für endlich viele Zahlen definiert, aber nicht für unendlich viele. Um dem formalen Ausdruck (3.3) einen Sinn zu geben, betrachtet man die *endlichen* Summen, die man erhält, indem die d_n *nach und nach* aufsummiert werden:

$$\begin{aligned} s_1 &= d_1 \\ s_2 &= d_1 + d_2 \\ s_3 &= d_1 + d_2 + d_3 \\ s_4 &= d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \\ &\ldots \text{ usw. } \ldots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die Abfolge der Zahlen s_n nennt man die *Folge der Partialsummen* der Reihe. Falls sie einer Zahl s unbegrenzt nahe kommen, und zwar in dem Sinn, dass für jedes $\varepsilon > 0$ (und sei es noch so klein) nur endlich viele der Partialsummen s_n einen größeren Abstand von s haben als ε, so nennt man die Reihe (3.3) **konvergent** und s ihren **Grenzwert** oder ihre **Summe** (oder einfach ihren **Wert**) und schreibt

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n = s. \tag{3.5}$$

Die Folge der Partialsummen (3.4) kann dann als Folge von Näherungswerten für s verstanden werden. In vielen für die Praxis relevanten Fällen ist dann s_n eine umso bessere Näherung für s, je größer n ist. In jedem Fall aber gibt es – so die obige Definition der Konvergenz – für jedes vorgegebene Genauigkeitsmaß $\varepsilon > 0$ einen Index, *ab dem* alle Partialsummen nicht stärker von s abweichen als ε. Man drückt das auch durch die Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s \tag{3.6}$$

aus. Ist die Reihe (3.3) nicht konvergent, so nennt man sie **divergent**. Ein Beispiel für eine konvergente Reihe ist die *geometrische Reihe*, die Ihnen wahrscheinlich bekannt ist: Ist q eine reelle Zahl mit $|q| < 1$, so gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{1}{1-q}\,. \tag{3.7}$$

Auf der Basis dieser Begriffsdefinitionen ist jeder Ausdruck der Form (3.1) oder (3.2) für jede Wahl der Koeffizienten und für jedes vorgegebene x bzw. t eine Reihe, die entweder konvergent oder divergent ist. Die zugehörigen Partialsummen, als Funktionen von x bzw. t aufgefasst, sind trigonometrische Polynome.

Lassen wir also Reihen der Form (3.1) oder (3.2) zu, so stellt sich die nächste Frage, welche Funktionen (von x bzw. t) durch sie dargestellt werden. Und jetzt kommt die eigentliche Überraschung: Es sind *sehr viele* Funktionen, die auf diese Weise dargestellt werden. (Schon Abbildung 4, die ja nur trigonometrische Polynome zeigt, gibt einen Vorgeschmack davon.) In praktischer Hinsicht könnte man fast sagen: so ziemlich *alle Funktionen*, die einem einfallen, um ein periodisches Signal zu modellieren! Das „fast“ betrifft einige Einschränkungen, von denen die meisten jenseits der technischen Anwendungszwecke liegen und uns hier nicht interessieren müssen. Wir wollen uns im Folgenden auf Funktionen konzentrieren, die *stetig differenzierbar* oder *stückweise stetig differenzierbar* sind.

Kleiner **Exkurs** zu den Begriffen *stetig differenzierbar* und *stückweise stetig differenzierbar*:

Eine Funktion h heißt **stetig**, wenn eine kleine Änderung von x nur eine kleine Änderung von $h(x)$ zur Folge hat. Nähert man sich der Stelle x, so streben die Funktionswerte gegen den Funktionswert $h(x)$. Das wird durch die Schreibweise

$$\lim_{\xi\to x} h(\xi) = h(x). \tag{3.8}$$

ausgedrückt, wobei das Symbol $\lim$ („Limes“) einen Funktionsgrenzwert bezeichnet. (Stellen Sie sich unter dem Symbol $\lim\limits_{\xi\to x}$ vor, dass eine Stelle ξ gedanklich beliebig nahe an x herangeschoben wird, dabei aber stets $\neq x$ bleibt.) Man sagt auch (ein bisschen salopp), dass der Graph einer stetigen Funktion eine zusammenhängende Kurve ist, die man in einem Zug zeichnen kann, ohne abzusetzen.

Eine Funktion heißt **stetig differenzierbar**, wenn sie differenzierbar[9] und ihre Ableitung stetig ist. Die meisten, wenn nicht alle Funktionen, die Sie in Ihrem Mathematikunterricht kennengelernt haben, sind stetig differenzierbar.

[9] Zu den Begriffen der Differenzierbarkeit und der Ableitung siehe das Skriptum *Differenzieren – kurz und bündig*.

Eine auf einem beschränkten abgeschlossenen Intervall I definierte Funktion h heißt **stückweise stetig differenzierbar** (oder **abschnittsweise stetig differenzierbar**), wenn sie entweder stetig differenzierbar ist oder wenn man das Intervall I in endlich viele Teilintervalle zerlegen kann, sodass h in jedem dieser Teilintervalle stetig differenzierbar ist, und folgende zusätzliche Bedingung gilt: An jeder Zerlegungsstelle x zwischen den Teilintervallen sollen die Funktionswerte bei Annäherung von unten (d.h. von „links") gegen eine Zahl, den **linksseitigen Grenzwert**

$$\lim_{\xi \uparrow x} h(\xi) = h(x-), \tag{3.9}$$

und bei Annäherung von oben (d.h. von „rechts") gegen eine Zahl, den **rechtsseitigen Grenzwert**

$$\lim_{\xi \downarrow x} h(\xi) = h(x+), \tag{3.10}$$

streben[10]. (Stellen Sie sich unter den Symbolen $\lim\limits_{\xi \uparrow x}$ und $\lim\limits_{\xi \downarrow x}$ vor, dass eine Stelle ξ gedanklich von unten bzw. von oben beliebig nahe an x herangeschoben wird, dabei aber stets kleiner bzw. größer als x bleibt.) Keiner dieser „einseitigen" Grenzwerte $h(x-)$ und $h(x+)$ muss mit dem Funktionswert $h(x)$ an der betreffenden Stelle übereinstimmen. Ist entweder $h(x-) \neq h(x)$ oder $h(x+) \neq h(x)$ (oder beides), so ist x eine **Unstetigkeitsstelle**. Das gilt auch dann, wenn $h(x-) = h(x+) \neq h(x)$ ist. Gilt $h(x-) \neq h(x+)$, so nennen wir x eine **Sprungstelle**. Die Funktion „springt" dann beim Durchgang durch die Stelle x abrupt um $h(x+) - h(x-)$. Sie können den Graphen einer stückweise stetig differenzierbaren Funktion sehen, wenn Sie bis zur Abbildung 8 (rechts) vorblättern.

Von besonderem Interesse für uns sind auf ganz $\mathbb{R}$ definierte L-periodische Funktionen h (d.h. Funktionen, für die gilt: $h(x + L) = h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$), die in jedem beschränkten abgeschlossenen Intervall stückweise stetig differenzierbar sind. (Ist das für *ein* Intervall der Länge L der Fall, so gilt es aufgrund der Periodizität automatisch für alle.) Wir nennen solche Funktionen **L-periodisch und stückweise stetig differenzierbar** (wobei wir in diese Bezeichnung auch die stetig differenzierbaren periodischen Funktionen mit einschließen).

Periodische Signale,

- die in unterschiedlichen Anwendungskontexten *beobachtet* (*gemessen*) werden und analysiert werden sollen (**Fourieranalyse**)
- oder die für bestimmte Zwecke theoretisch vorgegeben sind und (beispielsweise als Spannungssignale in einem geeigneten elektrischen Schaltkreis) physikalisch realisiert werden sollen (**Fouriersynthese**),

sind in aller Regel stückweise stetig differenzierbar, und daher wollen wir unser Hauptaugenmerk den Funktionen dieses Typs schenken.

[10] Es wird also die *Existenz* von linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert verlangt. Insbesondere soll keine Unendlichkeitsstelle vorliegen, und h darf nicht zu stark oszillieren. Am linken bzw. rechten Randpunkt von I wird nur verlangt, dass der rechtsseitige bzw. linksseitige Grenzwert existiert.

Für jede 2π-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ können wir die Fourierkoeffizienten wie in (2.34) – (2.36) bilden, aber nun für *alle* (unendlich vielen) natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx \tag{3.11}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\, x)\, g(x)\, dx \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.12}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\, x)\, g(x)\, dx \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.13}$$

Aufgrund der Periodizität der Integranden könnten wir in diesen Formeln genausogut über das Intervall $[0, 2\pi]$ integrieren, vgl. (2.31). Da g stückweise stetig differenzierbar ist, trifft das auch für die Integranden in diesen Formeln zu, sodass die Integrale alle einwandfrei definiert sind. Bilden wir mit diesen Fourierkoeffizienten die Reihe (3.1) – ab jetzt nennen wir sie die **Fourierreihe** (genauer: die Fourierreihe in **Sinus-Cosinus-Form**) von g – und bezeichnen sie mit dem Symbol $\widetilde{g}(x)$, also

$$\widetilde{g}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\, x) + b_n \sin(n\, x) \big), \tag{3.14}$$

so stellen sich die beiden Fragen,

(i) ob sie konvergiert und

(ii) was sie mit der gegebenen Funktion g zu tun hat.

Für den Fall, dass g ein trigonometrisches Polynom ist, kennen wir die Antworten schon: Die Reihe (3.14) ist dann nur eine gewöhnliche (endliche) Summe, und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist sie gleich $g(x)$, d.h. es gilt dann $\widetilde{g}(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Frage ist also, was sich daran ändert, **wenn für g auch allgemeinere 2π-periodische Funktionen zugelassen sind**. Joseph Fourier (1768 – 1839) hat behauptet, dass *jede* derartige Funktion als Überlagerung der trigonometrischen Basisfunktionen dargestellt werden kann. Im Laufe des 19. Jahrhunderts wurde klar, dass das in dieser Allgemeinheit nicht gilt, aber immerhin gibt es eine sehr große Klasse von Funktionen, die sich für alle oder zumindest für fast alle x als konvergente Fourierreihe darstellen lassen. Wir betrachten nur einen Teil dieser Klasse (der für die meisten praktischen Anwendungen der Signalanalyse und Signalsynthese ausreicht) und formulieren den folgenden mathematischen Satz, den wir nicht beweisen, aber in der Folge anwenden wollen:

Satz: Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion. Werden die Fourierkoeffizienten wie in (3.11) – (3.13) berechnet, so konvergiert die durch (3.14) gegebene Fourierreihe $\widetilde{g}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiters gilt:

- Ist g an der Stelle x stetig, so konvergiert die Fourierreihe gegen $g(x)$, d.h. es gilt dann
$$\widetilde{g}(x) = g(x). \tag{3.15}$$
- Ist x eine Unstetigkeitsstelle von g, so konvergiert die Fourierreihe gegen den Mittelwert aus linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert von g an der Stelle x, d.h. es gilt dann
$$\widetilde{g}(x) = \frac{g(x-) + g(x+)}{2}\,. \tag{3.16}$$

Ist umgekehrt eine 2π-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion g an allen Stellen x, an denen sie stetig ist, gleich dem Wert einer Reihe vom Typ (3.14), so sind die Koeffizienten a_0, a_n und b_n dieser Reihe durch (3.11) – (3.13) gegeben. Das bedeutet, dass die Fourierkoeffizienten durch g *eindeutig* bestimmt sind.

Sind nur endlich viele Fourierkoeffizienten ungleich 0, so ist g ein trigonometrisches Polynom. Auch ein trigonometrisches Polynom ist eine Fourierreihe!

Von den Unstetigkeitsstellen abgesehen, liefert die Fourierreihe (3.14) also wieder die vorgegebene Funktion g, was bedeutet, dass g nun als Reihe („unendliche Summe") der uns ja bereits bekannten trigonometrischen Basisfunktionen $x \mapsto 1$, $x \mapsto \cos(n\,x)$ und $x \mapsto \sin(n\,x)$ (für $n = 1, 2, 3, \dots$) dargestellt ist. Man sagt, dass die Funktion g **in eine Fourierreihe entwickelt** worden ist. Die Koeffizienten a_0, a_n und b_n (für $n = 1, 2, 3, \dots$) drücken aus, „wie stark" (mit welchem „Gewicht") die jeweilige Basisfunktion „in g enthalten ist". Hinter diesen Formulierungen steckt die in der Praxis nützliche Sichtweise, dass diese Basisfunktionen in gewisser Weise schon von vornherein in g „enthalten waren" und mit Hilfe der Formeln (3.11) – (3.13) nur ans Tageslicht geholt wurden.

Müssen wir uns wegen der Sache mit den Unstetigkeitsstellen Sorgen machen? Nein, überhaupt nicht! Der genaue Wert von g an einer *einzelnen* Stelle ist für praktische Zwecke gänzlich irrelevant. Das passt auch gut damit zusammen, dass die Integrale in (3.11) – (3.13) keinen Unterschied „spüren", wenn ein einzelner Funktionswert von g verändert wird. Man schreibt dann manchmal
$$g(x) \underset{\text{ae}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\big) \tag{3.17}$$
oder kurz $g(x) \underset{\text{ae}}{=} \widetilde{g}(x)$, wobei das Symbol $\underset{\text{ae}}{=}$ für *equal almost everywhere* (*fast überall gleich*) steht. Für die in diesem Skriptum betrachteten Funktionen bedeutet das: „überall gleich außer eventuell an den Unstetigkeitsstellen" (an denen der Wert der Fourierreihe nicht unbedingt $g(x)$, sondern gleich dem Mittelwert (3.16) ist). Ist g stetig differenzierbar, so kann man $\underset{\text{ae}}{=}$ durch $=$ ersetzen: Die Fourierreihe hat dann überall die gleichen Werte wie die Funktion g, d.h. $\widetilde{g}(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

In manchen Lehrbüchern wird vorgeschlagen, den Wert einer Funktion an einer Sprungstelle grundsätzlich als Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert zu wählen. Mit dieser Konvention stimmt die Fourierreihe von g an jeder Stelle mit g überein: $\widetilde{g}(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

In mathematischer Hinsicht beruhen all diese Überlegungen auf dem Konzept der *punktweisen Konvergenz*, d.h. für jede Stelle (für jeden „Punkt") x wird getrennt untersucht, ob die Fourierreihe $\widetilde{g}(x)$ gegen den dortigen Funktionswert $g(x)$ konvergiert. Es gibt in der Theorie noch andere Konvergenzbegriffe, die wir hier aber nicht betrachten.

Dass die Fourierreihe (3.14) an allen Stellen x, an denen g stetig ist, gegen $g(x)$ konvergiert, hat zur Folge, dass ihre **Partialsummen** für diese Stellen **Approximationen** für $g(x)$ darstellen. Wir wollen die Partialsumme, die die Beiträge aller Basisfunktionen bis $\cos(k\,x)$ und $\sin(k\,x)$ umfasst, in der Form

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_k(x) = \quad & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + \\ & + a_2 \cos(2\,x) + b_2 \sin(2\,x) + \\ & + \ldots \\ & + a_k \cos(k\,x) + b_k \sin(k\,x) = \\ = \frac{a_0}{2} & + \sum_{n=1}^{k} \big(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\big) \end{aligned} \tag{3.18}$$

anschreiben. Wir nennen sie die **Partialsumme der Ordnung** k. Sie ist ein trigonometrisches Polynom zur Periode 2π, aber im Unterschied zur Summe in (2.33), die äußerlich genauso aussieht wie (3.18), steht g nun für eine beliebig vorgegebene 2π-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion, die nicht notwendigerweise ein trigonometrisches Polynom ist. Gemäß der Definition der Konvergenz einer Reihe strebt $\widetilde{g}_k(x)$ für $k \to \infty$ gegen $\widetilde{g}(x)$, was man auch durch die Schreibweise $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{g}_k(x) = \widetilde{g}(x)$ ausdrückt. Für die Approximationseigenschaft hinsichtlich der gegebenen Funktion g gilt:

- Ist g an der Stelle x stetig, so ist $\widetilde{g}_k(x)$ für großes k eine gute Approximation von $g(x)$, und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{g}_k(x) = g(x)$.
- Ist x eine Unstetigkeitsstelle von g, so approximiert $\widetilde{g}_k(x)$ nicht unbedingt $g(x)$, sondern den Mittelwert (3.16), und es gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \widetilde{g}_k(x) = \frac{1}{2}(g(x-) + g(x+))$.

Alles bisher Gesagte lässt sich auch auf periodische Funktionen mit einer beliebigen Periode T übertragen. Auch der obige Satz gilt für Funktionen dieses Typs. Mit unserer Vereinbarung (1.16), der Umrechnungsvorschrift (2.6) und der Abkürzung $\omega = \frac{2\pi}{T}$ können wir T-periodische Funktionen sehr leicht auf 2π-periodische Funktionen zurückführen. Die trigonometrischen Basisfunktionen zur Periode T sind, wie wir bereits wissen, die konstante Funktion $t \mapsto 1$ und die uns bereits bekannten harmonischen Schwingungen $t \mapsto \cos(n\,\omega\,t)$ und $t \mapsto \sin(n\,\omega\,t)$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Für jede T-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion f bildet man die Fourierkoeffizienten wie in (2.46) – (2.48), aber nun für *alle* (unendlich vielen) natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \tag{3.19}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \cos(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.20}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.21}$$

Die zugehörige Fourierreihe (3.2), also

$$\widetilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t)\big)\,, \tag{3.22}$$

konvergiert dann gegen $f(t)$, wenn f an der Stelle t stetig ist, und gegen den Mittelwert

$$\frac{f(t-) + f(t+)}{2}\,, \tag{3.23}$$

wenn t eine Unstetigkeitsstelle von f ist. Analog zu (3.17) können wir das in der Form

$$f(t) \underset{\text{ae}}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t)\big) \tag{3.24}$$

oder kurz $f(t) \underset{\text{ae}}{=} \widetilde{f}(t)$ anschreiben.

Dass die Fourierreihe (3.22) für alle Stellen t, an denen f stetig ist, gegen $f(t)$ konvergiert, hat zur Folge, dass ihre Partialsummen für diese Stellen Approximationen für $f(t)$ darstellen. Wir schreiben die Partialsumme der Ordnung k analog zu (3.18) in der Form

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_k(t) = \quad & \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega\,t) + b_1 \sin(\omega\,t) + \\ & + a_2 \cos(2\,\omega\,t) + b_2 \sin(2\,\omega\,t) + \\ & + \ldots \\ & + a_k \cos(k\,\omega\,t) + b_k \sin(k\,\omega\,t) = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} & \big(a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t)\big)\end{aligned} \tag{3.25}$$

an. Sie ist ein trigonometrisches Polynom zur Periode T, aber im Unterschied zur Summe in (2.45), die äußerlich genauso aussieht wie (3.25), steht f nun für eine beliebig vorgegebene T-periodische stückweise stetig differenzierbare Funktion, die nicht notwendigerweise ein trigonometrisches Polynom ist. Ist f an der Stelle t stetig, so ist $\widetilde{f_k}(t)$ für großes k eine gute Approximation von $f(t)$. Ist t eine Unstetigkeitsstelle von f, so approximiert $\widetilde{f_k}(t)$ nicht unbedingt $f(t)$, sondern den Mittelwert (3.23).

Mit der Möglichkeit, eine vorgegebene periodische Funktion in eine Fourierreihe zu entwickeln, können wir ein empfangenes (beobachtetes, gemessenes) Signal in die trigonometrischen Basisfunktionen (zur entsprechenden Periode) „zerlegen" und so beispielsweise etwas über den Prozess, der es hervorgebracht hat, in Erfahrung bringen. Umgekehrt macht es die Approximationseigenschaft von (3.18) bzw. (3.25) möglich, ein theoretisch vorgegebenes Signal, das für bestimmte praktische Zwecke als Spannungs- oder Stromstärkesignal benötigt wird, durch eine geeignete elektrische Schaltung auch tatsächlich mit vorgegebener Genauigkeit zu realisieren.

Ziehen wir eine Bilanz des Bisherigen: Wir können *jede* periodische, stückweise stetig differenzierbare Funktion in eine Fourierreihe entwickeln. Im Hinblick auf die Definition der Konvergenz einer Reihe (siehe den entsprechenden Exkurs weiter oben) bedeutet das, dass jedes periodische, stückweise stetig differenzierbare Signal **beliebig genau durch trigonometrische Polynome approximiert** werden kann (wobei lediglich an den Unstetigkeitsstellen nicht unbedingt der Funktionswert, sondern der Mittelwert (3.16) bzw. (3.23) approximiert wird). Das ist bemerkenswert, denn die periodischen, stückweise stetig differenzierbaren Funktion bilden eine *sehr* große Funktionenklasse. Dass sie *alle* im Sinn einer Fourierreihe von unseren Basisfunktionen erfasst werden, drückt deren **Vollständigkeit** aus. Andererseits ist die Liste der Basisfunktionen **minimal**, d.h. man kann keine Basisfunktion weglassen. Wird auch nur eine einzige Basisfunktion aus der Liste entfernt, so klappt die Sache nicht mehr!

> Hier ein Beispiel: Wenn wir Funktionen mit Periode 2π betrachten und die Funktion $x \mapsto \sin(x)$ aus der Liste der Basisfunktionen streichen, so lässt sich die Funktion g mit $g(x) = \sin(x)$ *nicht* in eine Reihe mit den verbleibenden Basisfunktionen entwickeln. Formal wäre die Reihe, die man dann wie in (3.14) bekommt, nur ohne den Summanden mit b_1, gleich 0 !

Diese Eigenschaft der Minimalität hängt damit zusammen, dass die Fourierkoeffizienten *eindeutig* bestimmt sind, sofern die zugrundegelegte Periode und die Funktion, die in eine Fourierreihe zu entwickeln ist, gegeben sind.

> Anmerkung für den Fall, dass Sie mit Vektoren vertraut und an ein bisschen **Hintergrundwissen** interessiert sind: Der Begriff „*Basis*funktionen" verweist auf eine Verwandtschaft mit der Vektorrechnung und der linearen Algebra. Eine „Basis" in der Ebene $\mathbb{R}^2$ bzw. im Raum $\mathbb{R}^3$ ist ein System von Vektoren, das die gesamte Ebene bzw. den gesamten Raum „aufspannt", aber nicht größer ist als nötig. Eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist ein System aus zwei nicht zueinander parallelen Vektoren. Eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist ein System aus drei Vektoren, die nicht in einer Ebene liegen. Jeder ebene bzw. räumliche Vektor kann dann in eindeutiger Weise als Linearkombination der „Basisvektoren" dargestellt werden. Das ist in gewisser Weise analog dazu, dass jede periodische, stückweise stetig differenzierbare Funktion in eindeutiger Weise als „unendliche Linearkombination" (= Fourierreihe) der trigonometrischen Basisfunktionen dargestellt werden kann.

Die Analogie reicht sogar noch weiter: Für stückweise stetig differenzierbare 2π-periodische Funktionen ψ und ϕ kann das Integral

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x)\, \phi(x)\, dx \tag{3.26}$$

als *Skalarprodukt* von ψ und ϕ betrachtet werden. Bezeichnet man zwei Funktionen, für die (3.26) gleich 0 ist, als „zueinander orthogonal“, so besagen die Formeln (2.10) – (2.15), dass die trigonometrischen Basisfunktionen paarweise zueinander orthogonal sind. So gesehen kann die **Fourierreihe als Analogon zur Entwicklung eines Vektors in eine „Orthogonalbasis“** verstanden werden. Allgemein sieht die Entwicklung eines Vektors ψ in eine Orthogonalbasis aus Vektoren b_j so aus:

$$\psi = \sum_j \frac{\langle b_j, \psi \rangle}{\|b_j\|^2}\, b_j, \qquad \text{mit } \|b_j\|^2 = \langle b_j, b_j \rangle. \tag{3.27}$$

Diese Formel gilt nicht nur im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, sondern sie reproduziert auch die Fourierreihe (3.14). Und sie reproduziert die Fourierreihe (3.22) bezüglich einer beliebigen Periode T, wenn (3.26) in ein Integral über das Intervall $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ abgeändert wird. (Tatsächlich kann dieses Konzept des Skalarprodukts sogar auf eine viel größere Klasse von Funktionen ausgedehnt werden, wenn auch andere Konvergenzbegriffe zugelassen werden.)

Hat man einmal eine T-periodische Funktion f in eine Fourierreihe entwickelt, die für (fast) alle t gegen $f(t)$ konvergiert (das ist, wie wir bereits wissen, auf jeden Fall dann garantiert, wenn f T-periodisch und stückweise stetig differenzierbar ist), so **enthalten die Fourierkoeffizienten a_0, a_n und b_n (für $n \geq 1$) die gleiche Information wie f selbst** (von den irrelevanten Werten an eventuellen Sprungstellen von f abgesehen). Um gewisse Eigenschaften der Funktion herauszufinden oder bestimmte Operationen auszuführen, hat man dann die Wahl zwischen zwei Betrachtungsweisen:

- Man spricht vom **Zeitbereich**, wenn man die Funktion f betrachtet und mit ihr arbeitet. Die Variable t wird als Zeit aufgefasst. (Das gilt auch für den Spezialfall $T = 2\pi$, in dem wir die Funktion mit g und die Variable mit x bezeichnet haben.) Im Zeitbereich arbeitet man direkt mit der Information

$$t \mapsto f(t) \qquad \text{für } t \in \mathbb{R}, \tag{3.28}$$

  also mit der Zuordnung Zeitpunkt $\mapsto$ Funktionswert.

- Man spricht vom **Frequenzbereich** (auch **Spektralbereich** oder **Fourierbereich**), wenn man stattdessen die Fourierkoeffizienten betrachtet. Die zur $(n-1)$-ten Oberschwingung gehörende Kreisfrequenz ist $\frac{2\pi n}{T} = n\,\omega$, die zugehörige Frequenz ist $\frac{n}{T} = n\,\frac{\omega}{2\pi}$ (wobei $n = 0$ für den konstanten Anteil steht, mit Frequenz 0, wenn man so will). Für den Spezialfall $T = 2\pi$ ist die n-te Kreisfrequenz gleich dem Index n und die zugehörige Frequenz gleich $\frac{n}{2\pi}$. In jedem Fall werden die Frequenzen durch den Index n charakterisiert. In diesem Sinn kann man n als „Frequenzvariable“ bezeichnen (wobei

$n = 0$ für den konstanten Anteil, also für „Frequenz 0“ steht). Im Frequenzbereich arbeitet man mit der Information

$$\begin{aligned} n &\mapsto a_n \quad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ n &\mapsto b_n \quad \text{für } n = 1, 2, 3, 4, \ldots, \end{aligned} \tag{3.29}$$

also mit der Zuordnung Frequenzvariable $\mapsto$ Fourierkoeffizienten.

Manche Aufgabenstellungen bearbeitet man besser im Zeitbereich, andere lassen sich im Frequenzbereich einfacher lösen. Am effektivsten ist es, stets beide Betrachtungsweisen und ihren Zusammenhang im Blick zu behalten.

4 Fourierkoeffizienten gerader und ungerader Funktionen

Bevor wir uns ein Beispiel für die Berechnung einer Fourierreihe ansehen, ist es angebracht, zwei Fälle zu erwähnen, in denen die Werte mancher Fourierkoeffizienten von vornherein bekannt sind. Wir nennen eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine **gerade Funktion**, wenn

$$h(-x) = h(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

und eine **ungerade Funktion**, wenn

$$h(-x) = -h(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Man sagt auch, dass gerade und ungerade Funktionen eine wohldefinierte **Parität** besitzen. Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur zweiten Achse, der Graph einer ungeraden Funktion geht durch eine Punktspiegelung am Ursprung (d.h. durch eine Drehung um $180°$ um den Ursprung) in sich über. Für eine ungerade Funktion gilt stets $h(0) = 0$, wie sich sofort aus (4.2) ergibt.

Abbildung 6 zeigt typische Beispiele für eine gerade und eine ungerade Funktion.

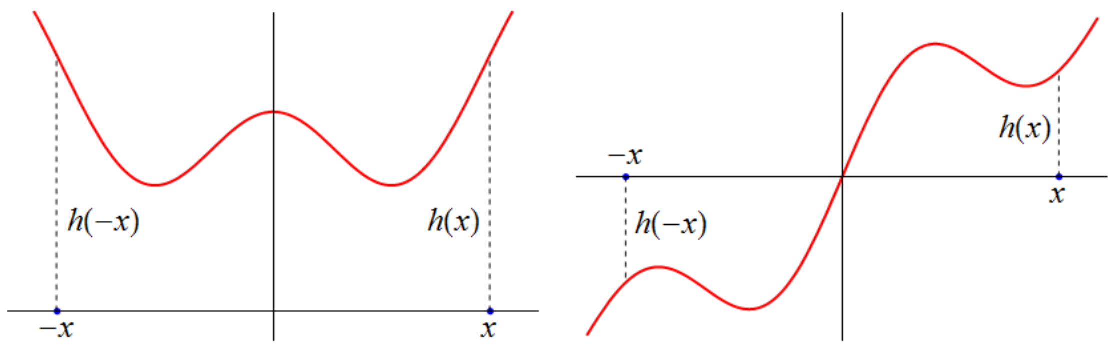


Abbildung 6: Links der Graph einer geraden Funktion, rechts der Graph einer ungeraden Funktion.

Für die Kombinationen von (un)geraden Funktionen gilt:

- Summen und Vielfache von geraden Funktionen sind wieder gerade.
- Summen und Vielfache von ungeraden Funktionen sind wieder ungerade.
- Das Produkt zweier gerader Funktionen ist gerade.
- Das Produkt zweier ungerader Funktionen ist *gerade*.
- Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist *ungerade*.

Versuchen Sie, diese direkt aus den Definitionen (4.1) und (4.2) folgenden Aussagen zu beweisen! (Das wird eine der Übungsaufgaben am Ende dieses Skriptums sein.)

Die trigonometrischen Basisfunktionen $x \mapsto 1$ und $x \mapsto \cos(n\,x)$ sind gerade Funktionen (beispielsweise gilt $\cos(-3x) = \cos(3x)$), und die trigonometrischen Basisfunktionen $x \mapsto \sin(n\,x)$ sind ungerade Funktionen (beispielsweise gilt $\sin(-3x) = -\sin(3x)$). Auch für die Basisfunktionen in Bezug auf eine beliebige Periode T gilt: $t \mapsto 1$ und $t \mapsto \cos(n\,\omega\,t)$ sind gerade Funktionen, $t \mapsto \sin(n\,\omega\,t)$ sind ungerade Funktionen.

Nun wird in den Formeln für die Fourierkoeffizienten (2.34) – (2.36) bzw. (2.46) – (2.48) über ein symmetrisches Intervall $[-\pi, \pi]$ bzw. $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ integriert. Ist der Integrand ungerade, so ist ein solches Integral gleich 0, denn die Beiträge von der linken und von der rechten Hälfte des Integrals heben einander genau auf. Ganz allgemein gilt:

$$\int_{-c}^{c} h(x)\,dx = 0 \qquad \text{für ungerades } h \text{ und beliebiges } c \tag{4.3}$$

(siehe Abbildung 7).

Für eine gerade Funktion h gilt hingegen

$$\int_{-c}^{c} h(x)\,dx = 2\int_{0}^{c} h(x)\,dx, \tag{4.4}$$

was die Berechnung mancher Integrale vereinfacht.

Das hat bedeutende Konsequenzen für die Fourierkoeffizienten gerader und ungerader Funktionen:

- Ist g bzw. f eine **gerade** Funktion, so sind die Integranden in (3.13) bzw. (3.21) ungerade Funktionen. Daher ist $b_n = 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Alle Fourierkoeffizienten b_n einer geraden Funktion sind gleich 0. **Die Fourierreihe einer geraden Funktion ist eine reine Cosinusreihe** (wobei die konstante Basisfunktion zu den Cosinusfunktionen gezählt wird). Mit (4.4) vereinfachen sich die Berechnungen (3.11) und (3.12) der Fourierkoeffizienten a_0 und a_n einer geraden 2π-periodischen Funktion g zu

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} g(x)\,dx \tag{4.5}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(n\,x)\,g(x)\,dx \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{4.6}$$

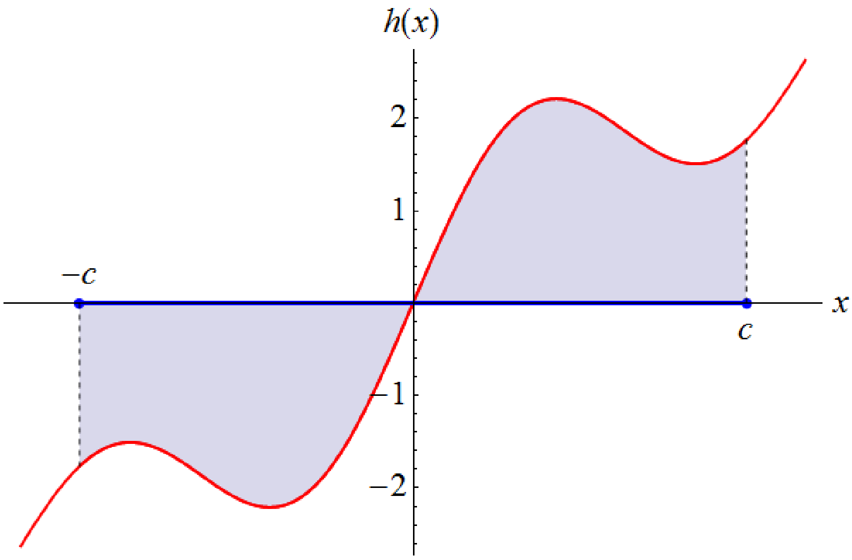


Abbildung 7: Das Integral einer ungeraden Funktion h über ein symmetrisches Intervall, d.h. über ein Intervall der Form $[-c, c]$, ist gleich 0, da die entsprechenden (orientierten) Flächeninhalte links und rechts der zweiten Achse dem Betrag nach gleich groß sind, aber verschiedene Vorzeichen haben und daher einander aufheben. Folglich gilt (4.3). Dieser Sachverhalt kann auch rechnerisch mit Hilfe der Variablensubstitution $u = -x$ gezeigt werden:

$$\int_{-c}^{c} h(x)\, dx = -\int_{c}^{-c} h(-u)\, du \overset{h \text{ ungerade}}{=} \int_{c}^{-c} h(u)\, du = -\int_{-c}^{c} h(u)\, du\,.$$

Das Integral ist daher „minus es selbst“ und somit gleich 0.

Analog vereinfachen sich (3.19) und (3.20) für eine gerade T-periodische Funktion f zu

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\, dt \tag{4.7}$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \cos(n\,\omega\, t)\, f(t)\, dt \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{4.8}$$

- Ist g bzw. f eine **ungerade** Funktion, so sind die Integranden in (3.11) und (3.12) bzw. (3.19) und (3.20) ungerade Funktionen. Daher ist $a_n = 0$ für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Alle Fourierkoeffizienten a_n (inklusive a_0) einer ungeraden Funktion sind gleich 0. **Die Fourierreihe einer ungeraden Funktion ist eine reine Sinusreihe**. Mit (4.4) vereinfacht sich die Berechnung (3.13) der Fourierkoeffizienten b_n einer ungeraden 2π-periodischen Funktion g zu

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(n\, x)\, g(x)\, dx \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{4.9}$$

Analog vereinfacht sich (3.21) für eine ungerade T-periodische Funktion f zu

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} \sin(n\,\omega\, t)\, f(t)\, dt \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{4.10}$$

Hätte man in den Formeln für die Fourierkoeffizienten nicht die symmetrischen Integrationsintervalle $[-\pi, \pi]$ bzw. $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ gewählt, sondern etwa $[0, 2\pi]$ bzw. $[0, T]$, so wären diese Erkenntnisse natürlich ebenfalls gültig (die Fourierkoeffizienten sind ja immun gegen eine Verschiebung des Integrationsintervalls), aber sie wären nicht so offensichtlich.

Unter dem Strich verwundert es nicht, dass nur die geraden Basisfunktionen in den geraden Funktionen und nur die ungeraden Basisfunktionen in den ungeraden Funktionen enthalten sind.

Im allgemeinen Fall werden Funktionen g bzw. f, die in eine Fourierreihe entwickelt werden sollen, weder gerade noch ungerade sein. Manchmal ist es nützlich zu wissen, dass jede Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in eindeutiger Weise in die Summe aus einem geraden und einem ungeraden Anteil aufgespaltet werden kann:

$$g(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\Big(g(x) + g(-x)\Big)}_{\text{gerader Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{2}\Big(g(x) - g(-x)\Big)}_{\text{ungerader Anteil}} . \tag{4.11}$$

Die Fourierreihe des geraden Anteils besteht dann nur aus Cosinusfunktionen, die Fourierreihe des ungeraden Anteils besteht nur aus Sinusfunktionen, d.h. die beiden Anteile können unabhängig voneinander in eine Fourierreihe entwickelt werden. Die gesamte Fourierreihe ist dann die Summe der Fourierreihen der beiden Anteile. Das ist insbesondere dann hilfreich, wenn die zu entwickelnde Funktion von der Form

$$\underbrace{\text{Konstante}}_{\text{gerader Anteil}} + \underbrace{\text{ungerade Funktion}}_{\text{ungerader Anteil}} \tag{4.12}$$

ist.

5 Beispiel für die Berechnung einer Fourierreihe

Eine typische Aufgabenstellung im Zusammenhang mit unserem Thema besteht darin, eine gegebene periodische (stückweise stetig differenzierbare) Funktion in eine Fourierreihe zu entwickeln, d.h. die Fourierkoeffizienten zu finden. Oft werden dabei Funktionen mit Periode 2π herangezogen, da dann die auftretenden Basisfunktionen und die zu berechnenden Integrale am einfachsten sind. Viele der Funktionen, die einigermaßen interessante Signale der Periode 2π darstellen, werden nicht durch einen einzigen Funktionsterm angegeben, der für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten würde, sondern durch Festlegung der Funktionswerte innerhalb eines Intervalls der Länge 2π. Außerhalb dieses Intervalls sind die Funktionswerte dann aufgrund der Periodizität von g automatisch eindeutig bestimmt. Sind beispielsweise die Funktionswerte einer 2π-periodischen Funktion g in einem der Intervalle[11] $(-\pi, \pi]$, $[-\pi, \pi)$, $(0, 2\pi]$ oder $[0, 2\pi)$ bekannt, so sind sie aufgrund der Periodizität von g auf ganz $\mathbb{R}$ festgelegt. Man sagt dann, g wird auf ganz $\mathbb{R}$ **periodisch fortgesetzt**.

[11] Es handelt sich dabei um *halboffene Intervalle*, d.h. ein Randpunkt gehört dazu, der andere nicht. $(-\pi, \pi]$ ist eine Kurzschreibweise für die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die $-\pi < x \leq \pi$ gilt. Intervalle wurden im Warmup-Skriptum *Die Ordnung der reellen Zahlen* ausführlich besprochen.

Hier nun unser Beispiel: Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{wenn } -\pi < x \le \pi \\ \text{periodisch fortgesetzt} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5.1}$$

Das bedeutet, dass g innerhalb des Intervalls $(-\pi, \pi]$ durch $g(x) = x$ gegeben ist. Bevor Sie drauflosintegrieren, sollten Sie es sich in solchen Fällen zur Gewohnheit machen, zuerst den Graphen von g zu betrachten. Damit machen Sie sich ein erstes Bild, um welche Art von Signal es sich handelt. Abbildung 8 zeigt links den Graphen der Funktion $x \mapsto x$ im Intervall

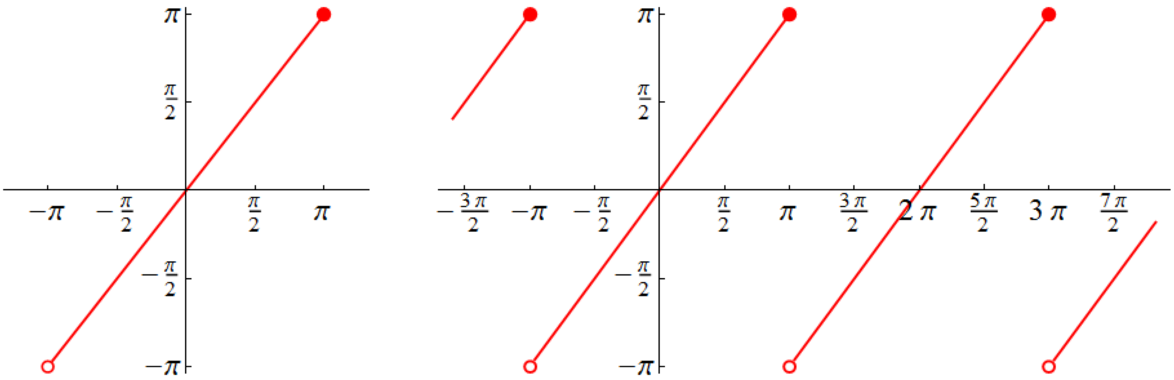


Abbildung 8: Links: Der Graph der Funktion g, auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ eingeschränkt. Das ist die Funktion $(-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Sie entspricht der ersten Zeile in der Definition (5.1). Ein voller roter Kreis zeigt an, dass der betreffende Punkt zum Graphen gehört. Eine rote Kreislinie ohne Füllung zeigt an, dass der betreffende Punkt nicht zum Graphen gehört.
Rechts: Die Funktion g ist die periodische Fortsetzung der links gezeigten Funktion auf ganz $\mathbb{R}$. Die Unstetigkeitsstellen sind $\pm\pi$, $\pm 3\pi$, $\pm 5\pi, \dots$.

$(-\pi, \pi]$ und rechts die sich daraus ergebende periodische Fortsetzung auf ganz $\mathbb{R}$. Sie ist nicht stetig differenzierbar, aber immerhin stückweise stetig differenzierbar. Es handelt sich um eine *Kippschwingung* (*Sägezahnfunktion*), der Graph von g heißt *Sägezahnkurve*. Das Signal nimmt linear zu, fällt abrupt ab, steigt wieder an, usw.

Machen wir uns anhand dieses Beispiels auch klar, dass ein Term, der die Werte einer periodischen Funktion in einem Intervall angibt, an eben dieses Intervall gebunden ist. So ist etwa die Angabe $g(x) = x$ in (5.1) ausdrücklich auf den Bereich $-\pi < x \le \pi$, also auf das Intervall $(-\pi, \pi]$ bezogen. Innerhalb dieses Intervalls ist der Graph von g die Gerade durch den Ursprung mit Steigung 1. Das ist beispielsweise für das Intervall $[0, 2\pi)$ *nicht* der Fall, wie ein Blick auf den Graphen von g zeigt.

Um die Fourierkoeffizienten mit Hilfe der Formeln (3.11) – (3.13) zu berechnen, benötigen wir nur die Werte von g innerhalb des Integrationsintervalls $[-\pi, \pi]$. Abgesehen vom Funktionswert am linken Randpunkt $x = -\pi$ (der für die zu berechnenden Integrale irrelevant ist) gilt innerhalb dieses Intervalls $g(x) = x$, und dies können wir in (3.11) – (3.13) einsetzen.

Doch halt! Obligatorisch in solchen Fällen ist auch die Frage, ob g gerade, ungerade oder weder gerade noch ungerade ist. Der Graph in Abbildung 8 (rechts) zeigt, dass g *fast* eine ungerade Funktion ist. Wieso nur „fast"? Weil stets die rechten Randpunkte der Abschnitte zum Graphen von g gehören, die linken nicht. Insbesondere gilt für diese Funktion $g(-\pi) = g(\pi)$ und nicht $g(-\pi) = -g(\pi)$, wie es für eine ungerade Funktion sein müsste. Zum Glück merken die Integrale, die die Fourierkoeffizienten darstellen, nichts davon. Man hätte genausogut die linken Randpunkte zum Graphen schlagen können statt der rechten (oder $g(x)$ an den Unstetigkeitsstellen irgendwie anders definieren) – die Integrale spüren diese winzigen Unterschiede nicht. Bezüglich der Integrationen verhält sich g wie eine ungerade Funktion, und daher wissen wir wegen (4.3) von vornherein, dass

$$a_n = 0 \qquad \text{für } n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{5.2}$$

gilt. Es bleibt die Berechnung der Fourierkoeffizienten b_n. Wir setzen $g(x) = x$ in (3.13) ein und erhalten (für $n = 1, 2, 3, \ldots$)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\, x\, dx\,. \tag{5.3}$$

Das Problem reduziert sich auf die Berechnung dieses Integrals. Genauer: dieser Integrale, denn (5.3) ist für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ein Integral. Wenn Sie die Möglichkeit haben, zur Berechnung derartiger Integrale ein Computeralgebrasystem zu verwenden, dann tun Sie das! Sie können aber auch eine „Integraltafel" (Liste vieler unbestimmter und bestimmter Integrale, oft im Anhang von einschlägigen Lehrbüchern zu finden) zu Hilfe nehmen oder im Web suchen, ob Sie die Lösung finden. Falls von Ihnen verlangt wird, das Integral selbst auf dem Papier zu berechnen, bleibt Ihnen wohl nichts anderes übrig, als eine der Standardmethoden zur Integralberechnung zu versuchen[12]. Wir berechnen jetzt (5.3) mit der Methode der partiellen Integration, zunächst ohne den Vorfaktor $\frac{1}{\pi}$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\, x\, dx &= \frac{-\cos(n\,x)}{n}\, x \,\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\,x)}{n} \cdot 1\, dx = \\
&= \frac{-\cos(n\,x)}{n}\, x \,\bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{\sin(n\,x)}{n^2} \bigg|_{-\pi}^{\pi} = \\
&= -\frac{\cos(n\,\pi)}{n}\,\pi + \frac{\cos(-n\,\pi)}{n}\,(-\pi) + \frac{\sin(n\,\pi)}{n^2} - \frac{\sin(-n\,\pi)}{n^2} = \\
&\overset{(\star)}{=} -\frac{2\cos(n\,\pi)}{n}\,\pi + \frac{2\sin(n\,\pi)}{n^2} \overset{(\star\star)}{=} -\frac{2\,(-1)^n}{n}\,\pi = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n}\,\pi\,.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Dabei haben wir im Schritt $(\star)$ verwendet, dass $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\sin(-x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, und im Schritt $(\star\star)$ wurden die für beliebige ganze Zahlen n geltenden Beziehungen

$$\cos(n\,\pi) = (-1)^n \tag{5.5}$$
$$\sin(n\,\pi) = 0 \tag{5.6}$$

[12] Siehe das Skriptum *Integrieren – kurz und bündig*.

benutzt. (Merken Sie sich diese zwei Beziehungen gut! Man stößt im Zusammenhang mit Fourierreihen oft auf sie.) Im letzten Schritt wurde $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$ gesetzt. Nun berücksichtigen wir noch den Vorfaktor $\frac{1}{\pi}$ in (5.3) und erhalten als Ergebnis

$$b_n = \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{5.7}$$

Der Faktor $(-1)^{n+1}$ sagt uns, dass b_n für gerades n negativ und für ungerades n positiv ist. Die gesuchte Fourierreihe ist

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\,x) = \\ &= \frac{2}{1}\sin(x) - \frac{2}{2}\sin(2x) + \frac{2}{3}\sin(3x) - \frac{2}{4}\sin(4x) + \frac{2}{5}\sin(5x) - \ldots = \\ &= 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} - \ldots\right), \end{aligned} \tag{5.8}$$

wobei uns die zuletzt angegebene Form deutlich das Bildungsgesetz der Reihenglieder zeigt. Die Partialsumme der Ordnung k erhalten wir, indem wir die Reihe nach dem Beitrag mit $\sin(k\,x)$ abbrechen. Beispielsweise ist die Partialsumme der Ordnung 6 gegeben durch

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_6(x) &= \sum_{n=1}^{6} \frac{2\,(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\,x) = \\ &= 2\left(\sin(x) - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \frac{\sin(5x)}{5} - \frac{\sin(6x)}{6}\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

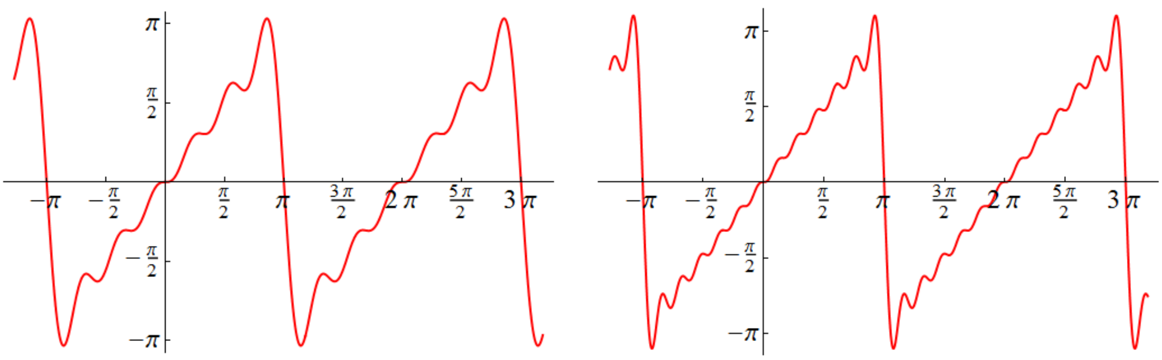


Abbildung 9: Die Graphen der Partialsummen $\widetilde{g}_6$ (links) und $\widetilde{g}_{12}$ (rechts) der Fourierreihe (5.8). Die Graphen von $\widetilde{g}_{20}$ und $\widetilde{g}_{100}$ sind in Abbildung 4 (Mitte) zu sehen.

Abbildung 9 zeigt die Graphen von $\widetilde{g}_6$ und $\widetilde{g}_{12}$. Die Graphen von $\widetilde{g}_{20}$ und $\widetilde{g}_{100}$ haben Sie bereits früher gesehen: Sie sind in Abbildung 4 (Mitte links: $\widetilde{g}_{20}$, Mitte rechts: $\widetilde{g}_{100}$) wiedergegeben.

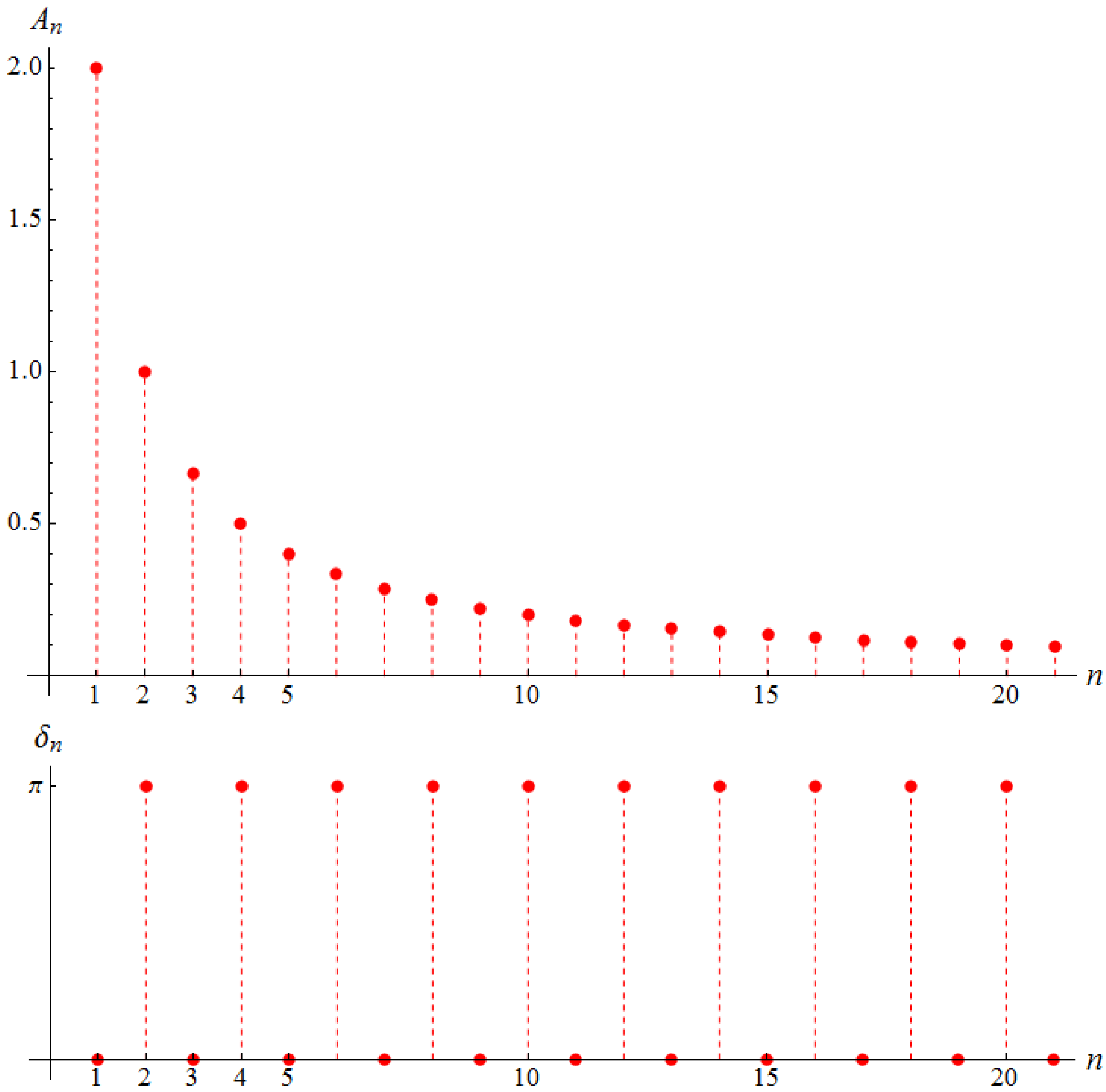


Abbildung 10: Oben: Das Amplitudenspektrum der Funktion (5.1). Aus (5.2) und (5.7) folgt mit (6.2)

$$A_n = \frac{2}{n} \qquad \text{für alle natürlichen Zahlen } n \geq 1.$$

Je größer n ist, umso kleiner ist die Amplitude der n-ten harmonischen Teilschwingung. Die Amplituden fallen wie $1/n$ ab.

Unten: Das Phasenspektrum der Funktion (5.1). Aus den abwechselnden Vorzeichen in (5.8) folgt mit der allgemeinen Beziehung $-\sin(x) = \sin(x + \pi)$, dass $\delta_n = 0$ für ungerades n und $\delta_n = \pi$ für gerades n.
Man kann dieses Ergebnis wegen $a_n = 0$ auch mit Hilfe von (1.14) erhalten: Ist $b_n > 0$ (was für ungerades n der Fall ist), so ist $\delta_n = 0$. Ist $b_n < 0$ (was für gerades n der Fall ist), so ist $\delta_n = \pi$.

An allen Stellen x, an denen g unstetig ist, streben die Funktionswerte $\widetilde{g}_k(x)$ für $k \to \infty$ gegen den Mittelwert aus links- und rechtsseitigem Grenzwert. Wie man am besten in Abbildung 8 (rechts) erkennt, ist der linksseitige Grenzwert an allen diesen Stellen gleich π, der rechtsseitige Grenzwert gleich $-\pi$. Daher konvergiert die Fourierreihe dort gegen 0. (In diesem Beispiel sind sogar alle Partialsummen an den Unstetigkeitsstellen gleich dem Mittelwert aus linksseitigem und rechtsseitigem Grenzwert von g, also gleich 0.)

Am Verlauf der Graphen in Abbildung 9 und noch besser in Abbildung 4 (Mitte) erkennt man das sogenannte **Gibbssche Phänomen**, das typisch für das Verhalten der Partialsummen hoher Ordnung in der Nähe von Unstetigkeitsstellen ist: Nähert sich x einer Unstetigkeitsstelle (z.B. $x = \pi$) von links, so oszilliert der Funktionswert $\widetilde{g}_k(x)$ heftig und bäumt sich noch einmal auf, bevor er jäh in die Tiefe stürzt. Erst nach neuerlichem nervösem Schwingen bei negativen Werten beruhigt er sich und passt sein Verhalten an das von $g(x)$ an. Je größer k ist, umso näher schiebt sich der Bereich, in dem $\widetilde{g}_k$ diese über das Ziel hinausschießenden Oszillationen ausführt, an die Unstetigkeitsstelle heran.

6 Spektrale Form der Fourierreihe

Wird ein periodisches Signal in eine Fourierreihe entwickelt, so möchte man auch quantitativ wissen, wie die in ihr enthaltenen Grund- und Oberschwingungen zusammenspielen. Diese Information liegt zunächst in Form der Fourierkoeffizienten a_n und b_n für $n \geq 1$ vor. Wenn es etwa um die Frage geht, wie „stark" (mit welchem „Gewicht") die n-te harmonische Schwingung vertreten ist, so sind weniger die individuellen Werte von a_n und b_n von Interesse als vielmehr die Amplitude der n-ten Schwingung. Nun erinnern wir uns, dass eine Linearkombination der Form (1.8) auch in der Form (1.1) geschrieben, also mit Hilfe einer einzigen Sinusfunktion durch Amplitude und Anfangsphase charakterisiert werden kann. Für die Fourierreihe einer Funktion f mit Periode T bedeutet das, dass für jedes $n \geq 1$ der Anteil mit Kreisfrequenz $n\,\omega$ zu

$$a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t) = A_n \sin(n\,\omega\,t + \delta_n) \tag{6.1}$$

umgeformt wird. Dabei werden A_n und δ_n wie in (1.9)−(1.14) berechnet. Insbesondere ist (für $n \geq 1$)

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \tag{6.2}$$

die Amplitude der n-ten Teilschwingung. Schreiben wird noch $A_0 = a_0$, damit alles schön einheitlich aussieht, so nimmt die Fourierreihe (3.22) die **spektrale Form**

$$\boxed{\widetilde{f}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\,\omega\,t + \delta_n) \qquad (6.3)}$$

an. Für eine 2π-periodische Funktion g ist die spektrale Form der Fourierreihe (3.14) (mit unserer Vereinbarung, die Variable dann x zu nennen) durch

$$\widetilde{g}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\,x + \delta_n) \tag{6.4}$$

gegeben.

Die Abhängigkeit der Amplitude A_n von n, d.h. die Funktion $n \mapsto A_n$ (für $n \geq 1$ oder, wenn auch der konstante Anteil erfasst werden soll, für $n \geq 0$), wird das **Amplitudenspektrum** (auch **Fourierspektrum** oder **Frequenzspektrum**) von f bzw. g genannt.

Die Abhängigkeit der Anfangsphase δ_n von n, d.h. die Funktion $n \mapsto \delta_n$ (für $n \geq 1$), wird das **Phasenspektrum** von f bzw. g genannt. (Ist ein $A_n = 0$, so ist das zugehörige δ_n unbestimmt, aber irrelevant. Ihm sollte dann in einer grafischen Darstellung des Phasenspektrums kein Wert zugewiesen werden.) Beim Arbeiten mit diesen Funktionen spricht man wie in (3.29) vom **Frequenzbereich**.

Abbildung 10 zeigt das Amplitudenspektrum und das Phasenspektrum der Funktion (5.1), die wir bereits in eine Fourierreihe, nämlich (5.8), entwickelt haben.

7 Komplexe Form der Fourierreihe

Wie im Skriptum *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion* angeklungen, ist es für manche Zwecke von Vorteil, komplexe Zahlen zu benutzen. Insbesondere wurde der Zusammenhang der Winkelfunktionen Sinus und Cosinus mit der komplexen Exponentialfunktion thematisiert. Zentral dabei war die Eulersche Formel

$$e^{j\,\varphi} = \cos(\varphi) + j\,\sin(\varphi) \qquad \text{für alle } \varphi \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$

Im Zusammenhang mit Fourierreihen zeigt sich die Nützlichkeit der komplexen Zahlen ein weiteres Mal. Aus (7.1) und der komplex konjugierten Form

$$e^{-j\,\varphi} = \cos(\varphi) - j\,\sin(\varphi) \tag{7.2}$$

folgen durch Addition und Subtraktion die zwei Beziehungen

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}\left(e^{j\,\varphi} + e^{-j\,\varphi}\right) \tag{7.3}$$

$$\sin(\varphi) = -\frac{j}{2}\left(e^{j\,\varphi} - e^{-j\,\varphi}\right), \tag{7.4}$$

die es uns gestatten, Sinus und Cosinus durch die komplexe Exponentialfunktion auszudrücken. Dies verwenden wir nun, um die Sinus- und Cosinus-Anteile einer Fourierreihe in komplexer Form zusammenzufassen. Wir formen die in der Fourierreihe (3.14) einer 2π-periodischen

Funktion g auftretende n-te harmonische Schwingung (für $n \geq 1$) um:

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x) &= \frac{a_n}{2}\left(e^{j\,n\,x} + e^{-j\,n\,x}\right) - \frac{j\,b_n}{2}\left(e^{j\,n\,x} - e^{-j\,n\,x}\right) = \\ &= \underbrace{\frac{1}{2}\,(a_n - j\,b_n)}_{c_n}\,e^{j\,n\,x} + \underbrace{\frac{1}{2}\,(a_n + j\,b_n)}_{c_{-n}}\,e^{-j\,n\,x} = \\ &= c_n\,e^{j\,n\,x} + c_{-n}\,e^{-j\,n\,x}\,. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Wie ersichtlich wurden anstelle von a_n und b_n die komplexen Konstanten

$$c_n = \frac{1}{2}\,(a_n - j\,b_n) \tag{7.6}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\,(a_n + j\,b_n) \tag{7.7}$$

eingeführt, die nun die Rolle der Fourierkoeffizienten übernehmen. Definieren wir zusätzlich

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \tag{7.8}$$

so können wir mit Hilfe der Beziehungen (7.5) und (7.8) die Fourierreihe (3.14) umformen[13]

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x)\big) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\,e^{j\,n\,x} + c_{-n}\,e^{-j\,n\,x}\right) = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,e^{j\,n\,x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\,e^{-j\,n\,x} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,e^{j\,n\,x} + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n\,e^{j\,n\,x} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{j\,n\,x} \end{aligned} \tag{7.9}$$

und damit in der recht kompakten Form

$$\boxed{\widetilde{g}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{j\,n\,x}} \tag{7.10}$$

[13] Dabei wurde $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}\,e^{-j\,n\,x}$ als $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} c_n\,e^{j\,n\,x}$ geschrieben. Ist Ihnen dieser Schritt klar? Die erste Reihe können Sie als $c_{-1}\,e^{-j\,x} + c_{-2}\,e^{-2\,j\,x} + c_{-3}\,e^{-3\,j\,x} + \ldots$ lesen, die zweite als $\ldots + c_{-3}\,e^{-3\,j\,x} + c_{-2}\,e^{-2\,j\,x} + c_{-1}\,e^{-j\,x}$. Es handelt sich um dieselbe Reihe, nur unterschiedlich angeschrieben. Das Endergebnis $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{j\,n\,x}$ ist als $\ldots + c_{-3}\,e^{-3\,j\,x} + c_{-2}\,e^{-2\,j\,x} + c_{-1}\,e^{-j\,x} + c_0 + c_1\,e^{j\,x} + c_2\,e^{2\,j\,x} + c_3\,e^{3\,j\,x} + \ldots$ zu lesen.

anschreiben. Das ist die **komplexe Form der Fourierreihe**. Die Reihe erstreckt sich nun über alle ganzzahligen Werte von n. Für $n \geq 1$ gehören die Anteile zu n und $-n$ zusammen und bilden die n-te harmonische Schwingung, die zu g beiträgt. Doch damit nicht genug: Auch die Berechnung der Fourierkoeffizienten in der neuen Form lässt sich in einheitlicherer und kompakterer Form angeben: Mit (3.11) ergibt sich

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\, dx, \tag{7.11}$$

und mit (3.12) und (3.13) berechnen wir für $n \geq 1$

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}\,(a_n - j\, b_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\,x)\, g(x)\, dx - \frac{j}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n\,x)\, g(x)\, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(\cos(n\,x) - j\, \sin(n\,x)\big)\, g(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\,n\,x}\, g(x)\, dx \end{aligned} \tag{7.12}$$

und völlig analog

$$c_{-n} = \frac{1}{2}\,(a_n + j\, b_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\,n\,x}\, g(x)\, dx. \tag{7.13}$$

Diese drei Ausdrücke können wir zu der einzigen Formel

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\,n\,x}\, g(x)\, dx \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}} \tag{7.14}$$

zusammenfassen.

Ganz analog, mit denselben Umrechnungen (7.6) – (7.8), können wir die Fourierreihe (3.22) einer T-periodischen Funktion f in der komplexen Form

$$\boxed{\widetilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j\,n\,\omega\,t}} \tag{7.15}$$

schreiben, wobei die neuen Fourierkoeffizienten durch

$$\boxed{c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\,n\,\omega\,t}\, f(t)\, dt \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}} \tag{7.16}$$

gegeben sind.

Anmerkung: Blättern Sie zurück zu den Beziehungen (2.10) – (2.15)! Sie haben uns in die Lage versetzt, die entscheidenden Formeln für die Koeffizienten trigonometrischer Polynome, die dann auch bei der Ermittlung der Fourierreihen anwendbar waren, zunächst einmal zu finden. Hätte man von vornherein die komplexe Form der Fourierreihe angestrebt, so wäre man mit der vergleichsweise simplen, für alle $n \in \mathbb{Z}$ geltenden Beziehung

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\,n\,x}\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{wenn } n = 0 \\ 0 & \text{wenn } n \neq 0 \end{cases} \tag{7.17}$$

(in der aber genauso viel Information steckt) ausgekommen! Um die Vereinfachungen zu illustrieren, die der komplexe Formalismus bietet, überprüfen wir (7.14) mit Hilfe von (7.17). Dazu berechnen wir das Integral in (7.14) in der Version für den Index m, indem wir für $g(x)$ die Reihe $\widetilde{g}(x)$, also (7.10) einsetzen[14]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\,m\,x}\,\widetilde{g}(x)\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\,m\,x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{j\,n\,x}\,dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\,m\,x}\,e^{j\,n\,x}\,dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\,(n-m)\,x}\,dx}_{2\pi,\ \text{wenn } n=m,\ \text{sonst } 0} \stackrel{(7.17)}{=} \frac{1}{2\pi}\,2\pi\,c_m = c_m\,. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Nur wenn der Summationsindex n den Wert m annimmt, ergibt sich ein Beitrag $\neq 0$. Das Ergebnis ist, wie es sein soll, der Fourierkoeffizient c_m. Damit ist überprüft, dass die Fourierkoeffizienten einer Funktion, die sich in eine Fourierreihe entwickeln lässt, durch (7.14) gegeben sind. Vergleichen Sie (7.18) mit der entsprechenden Rechnung im reellen Formalismus, für die die drei Teilberechnungen (2.24), (2.26) und (2.28) nötig waren[15], um *de facto* ein gleichwertiges Resultat zu erzielen! Hätte man gleich mit (7.17) und (7.18) begonnen, so hätte man sich das sparen können und mittels (7.6) – (7.7) auch die reelle Form (3.14) der Fourierreihe erhalten.

Fast alles, was wir bisher mit den periodischen Funktionen g und f gemacht haben, geht genauso, wenn diese Funktionen **komplexwertig** sind[16], d.h. vom Typ $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Es müssen dann nur der Real- und der Imaginärteil von g bzw. f dieselbe Periode (2π bzw. T) besitzen und stückweise stetig differenzierbar sein. Die Fourierreihe ist dann durch

$$\widetilde{g}(x) = \widetilde{\mathrm{Re}(g)}(x) + j\,\widetilde{\mathrm{Im}(g)}(x) \tag{7.19}$$

[14] Dass man dabei mit der unendlichen Summe so umgehen darf, wie man es mit einer endlichen Summe gewohnt ist, wollen wir nicht groß thematisieren. Man kann es mathematisch streng rechtfertigen.

[15] Wir haben sie früher zwar für trigonometrische Polynome, also für endliche Summen, durchgeführt. Hinsichtlich der einzelnen Umformungsschritte macht das aber keinen großen Unterschied, solange man mit Reihen genauso umgeht wie mit endlichen Summen.

[16] Lediglich die diversen Formeln für die Berechnung der Amplituden und der Anfangsphasen gelten in der angegebenen Form für komplexwertige Funktionen nicht mehr.

bzw.

$$\widetilde{f}(t) = \widetilde{\mathrm{Re}(f)}(t) + j\ \widetilde{\mathrm{Im}(f)}(t) \tag{7.20}$$

gegeben. In einem solchen Fall bietet sich die komplexe Form der Fourierreihe in besonderem Maße an: Wir verwenden einfach (7.10) und (7.14) bzw. (7.15) und (7.16), auch wenn g bzw. f komplexwertig ist. Die Realitäts- und Paritätseigenschaften der entwickelten Funktion lassen sich dann leicht durch die Fourierkoeffizienten c_n charakterisieren:

$$g \text{ bzw. } f \text{ ist reell} \iff \overline{c_{-n}} = c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \tag{7.21}$$

$$g \text{ bzw. } f \text{ ist gerade} \iff c_{-n} = c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z} \tag{7.22}$$

$$g \text{ bzw. } f \text{ ist ungerade} \iff c_{-n} = -c_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}. \tag{7.23}$$

(Genau genommen müssten wir zu „reell", „gerade" und „ungerade" jeweils ein „fast überall" dazuschreiben, aber auf die genauen Werte von g bzw. f an den Unstetigkeitsstellen kommt es ja bei den Fourierreihen nicht an.)

Ist g bzw. f reell, so ist die Amplitude (6.2) der n-ten Teilschwingung (für $n \geq 1$), durch die c_n ausgedrückt, durch

$$A_n = 2\,|c_n| \tag{7.24}$$

gegeben, wobei $|\,.\,|$ den (Absolut-)Betrag für komplexe Zahlen bezeichnet.

Im Zusammenhang mit der Funktion $n \mapsto c_n$ spricht man wie in (3.29) vom **Frequenzbereich**.

Die komplexe Form der Fourierreihe ist auch die Grundlage für eine andere Methode der Signalanalyse, die Fouriertransformation, die in einem eigenen Skriptum behandelt wird.

8 Einige weitere Eigenschaften der Fourierreihe

Wir erwähnen nun noch einige weitere Eigenschaften der Fourierreihe. Die Bezeichnungen g, f, a_n, b_n, A_n und c_n werden so verwendet wie bisher.

- Wir haben bisher die Bedingung gestellt, dass die in eine Fourierreihe zu entwickelnde Funktion periodisch und stückweise stetig differenzierbar ist. Man kann die diversen Formeln für die Berechnung der Fourierkoeffizienten auch auf **andere periodische Funktionen** anwenden. Falls alle dabei auftretenden Integrale existieren, bekommt man auch dann eine Fourierreihe. Aber ob (bzw. für welche x) diese konvergiert, und wogegen, das hängt dann vom konkreten Fall ab. Neben dem im Abschnitt 3 wiedergegebenen Satz gibt es noch eine Reihe weiterer Aussagen über die Existenz und Konvergenz der Fourierreihe für andere Funktionenklassen, in denen zum Teil auch andere Konvergenzbegriffe verwendet werden. All das geht aber über den Horizont dieses Skriptums hinaus. Im Zweifelsfall können Sie auf jeden Fall die Graphen einiger Partialsummen hoher Ordnung plotten – dann bekommen Sie meist ohnehin ein sicheres Gefühl dafür, was die Reihe (die ja aus der Folge der Partialsummen der Ordnung k durch den Grenzübergang $k \to \infty$ hervorgeht) für einzelne x macht.

- Das **Abfallverhalten des Amplitudenspektrums**, d.h. das Verhalten der Amplituden A_n für $n \to \infty$, hängt mit dem Verhalten der dargestellten Funktion g bzw. f „im Kleinen“ zusammen. Im Allgemeinen wird A_n umso schneller abfallen, je „glatter“ g bzw. f ist und je weniger Neigung zu Stellen mit großer (oder unendlicher) Steigung besteht. Hier ein paar Faustregeln:

  - $A_n \sim 1/n$ deutet in der Regel auf die Existenz von Sprungstellen. Siehe (5.1) und (5.8) als Beispiel.
  - $A_n \sim 1/n^2$ deutet auf Stetigkeit, aber fehlende Differenzierbarkeit, in der Regel auf Knicke im Graphen.
  - $A_n \sim 1/n^q$ für $q > 2$ deutet auf Differenzierbarkeit.

  Den Grund dafür kann man sich so vorstellen, dass die höheren harmonischen Schwingungen mit umso größeren „Gewichten“ zur Kooperation bei der Approximation einer gegebenen Funktion benötigt werden, je weniger friedlich sich diese „im Kleinen“ verhält.

- Unter gewissen Bedingungen kann man eine Fourierreihe **gliedweise differenzieren und integrieren** und erhält damit die Fourierreihe der Ableitung bzw. des Integrals der dargestellten Funktion. Vor allem beim Differenzieren muss man aber aufpassen, da eine stückweise stetig differenzierbare Funktion nicht differenzierbar und eine Ableitung – sofern sie existiert – nicht mehr selbst differenzierbar sein muss. Gliedweise differenzieren bedeutet, in einer Fourierreihe die auftretenden Basisfunktionen zu differenzieren, d.h. die Ersetzung

$$a_n \cos(n\,x) + b_n \sin(n\,x) \quad \stackrel{d/dx}{\longrightarrow} \quad -\,n\,a_n \sin(n\,x) + n\,b_n \cos(n\,x) \tag{8.1}$$

  bzw.

$$a_n \cos(n\,\omega\,t) + b_n \sin(n\,\omega\,t) \quad \stackrel{d/dt}{\longrightarrow} \quad -\,n\,\omega\,a_n \sin(n\,\omega\,t) + n\,\omega\,b_n \cos(n\,\omega\,t) \tag{8.2}$$

  vorzunehmen. Das kann leicht aus der Klasse von Funktionen, die wir hier betrachtet haben, herausführen! Eine der Faustregeln, die für das gliedweise Differenzieren zur Verfügung stehen, lautet: Ist f stetig und stückweise stetig differenzierbar, und existiert an einer Stelle x nicht nur die erste Ableitung $f'(x)$, sondern auch die zweite Ableitung $f''(x)$, so konvergiert die gliedweise differenzierte Fourierreihe von f an dieser Stelle gegen $f'(x)$.

  Wird eine Fourierreihe, die eine stetige, aber nicht differenzierbare Funktion darstellt, gliedweise differenziert, so kann es passieren, dass die so erhaltene Fourierreihe auch an den Stellen, an denen die ursprüngliche Funktion nicht differenzierbar ist, konvergiert. Dies führt auf einen verallgemeinerten Ableitungsbegriff. Gliedweises Differenzieren einer Fourierreihe kann aber auch zum gänzlichen Verlust der Konvergenz führen, selbst an Stellen, an denen die ursprüngliche Funktion differenzierbar ist.

- Ist g bzw. f reell, so ist für manche Zwecke das Integral von $g(x)^2$ bzw. $f(t)^2$ über ein Intervall der Länge 2π bzw. T von Interesse. In diesem Fall kann die **Parsevalsche Gleichung**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = \frac{{A_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {A_n}^2 = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{8.3}$$

bzw.

$$\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2\,dt = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) = \frac{{A_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} {A_n}^2 = 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{8.4}$$

verwendet werden. Für komplexwertige Funktionen gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \tag{8.5}$$

bzw.

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 . \tag{8.6}$$

- Sind g und h komplexwertige Funktionen mit Periode 2π, und sind c_n die Fourierkoeffizienten von g und d_n die Fourierkoeffizienten von h (beide in der komplexen Form der Fourierreihe), so gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(x)}\,h(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c_n}\,d_n. \tag{8.7}$$

  (Für $h = g$ erhält man daraus (8.5) als Spezialfall.)

- Zuletzt sprechen wir noch ein Thema an, das in vielen Fällen die Arbeit erleichtern kann: Hat man eine Funktion bereits erfolgreich in eine Fourierreihe entwickelt und möchte nun die Fourierreihe einer anderen Funktion ermitteln, die aus der ersten durch eine einfache **Transformation** (wie beispielsweise durch eine Verschiebung der Variable) hervorgeht, so kann man die neuen Fourierkoeffizienten oft durch eine einfache Modifikation der alten Fourierkoeffizienten erhalten. Dasselbe gilt für gewisse **Kombinationen von Funktionen**, deren Fourierreihen bereits bekannt sind.

  Wir listen nun einige solche Fälle (für Fourierreihen zur Periode 2π) auf, wobei wir uns auf die Fourierkoeffizienten in der komplexen Form (7.10) der Fourierreihe beziehen. Die (vorgegebenen) Funktionen g und h dürfen komplexwertig sein. Die folgende Tabelle kann als Übersetzungshilfe zwischen Zeitbereich und Frequenzbereich verstanden werden, die die bisherigen Methoden ergänzt:

Zeitbereich: Funktionswerte an der Stelle x (Periode 2π)	**Frequenzbereich**: Fourierkoeffizienten in der komplexen Form ($n \in \mathbb{Z}$)	wobei
$g(x)$ $h(x)$	c_n d_n	
$K\,g(x)$	$K\,c_n$	$K \in \mathbb{C}$
$g(x) + h(x)$	$c_n + d_n$	
$g(x) + K$	$c_0 + K$ für $n = 0$, sonst c_n	$K \in \mathbb{C}$
$g(x + \varphi)$	$e^{j\,n\,\varphi}\,c_n$	$\varphi \in \mathbb{R}$
$g(x - \pi)$	$(-1)^n\,c_n$	
$g(x + \pi)$	$(-1)^n\,c_n$	
$e^{j\,k\,x} g(x)$	c_{n-k}	$k \in \mathbb{Z}$
$g(x)\,h(x)$	$\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} c_m\,d_{n-m}$	
$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,h(x-\xi)\,d\xi$	$2\pi\,c_n\,d_n$	

Anmerkung:
Die Gesamtheit der Zahlen $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} c_m\,d_{n-m}$ (für $n \in \mathbb{Z}$) heißt **Faltung** der Fourierkoeffizienten von g und h. Die Funktion $x \mapsto \int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\xi)\,h(x-\xi)\,d\xi$ heißt **Faltung** der Funktionen f und g. Ein Produkt in der einen Spalte entspricht (in der letzten Zeile bis auf einen Faktor 2π) einer Faltung in der anderen.

Je nach Bedarf kann die Tabelle von links nach rechts oder von rechts nach links gelesen werden.

9 Ergänzung

Hier wie versprochen der Beweis der Formeln (2.10) – (2.15):

Beweis von (2.10):

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot dx = x\,\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi - (-\pi) = 2\pi. \tag{9.1}$$

Wenn Sie erkennen, dass das Integral gleich dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit Seiten 2π und 1 ist, können Sie sich diese Rechnung sparen!

Beweis von (2.11): Der Integrand ist eine ungerade Funktion, das Integrationsintervall symmetrisch. Daher ist das Integral gleich 0.

Beweis von (2.12):

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos(n\,x)\,dx = \frac{1}{n}\,\sin(n\,x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{n}\Big(\underbrace{\sin(n\,\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(-n\,\pi)}_{0}\Big) = 0. \tag{9.2}$$

Man kann dieses Ergebnis auch so erhalten: Die Cosinusfunktion ist nur eine verschobene Variante der Sinusfunktion. Mit einer geeigneten Verschiebung des Integrationsintervalls lässt sich das Integral zu (2.11) umformen, von dem aber schon gezeigt wurde, dass es gleich 0 ist.

Beweis von (2.13): Der Integrand ist eine ungerade Funktion, das Integrationsintervall symmetrisch. Daher ist das Integral gleich 0.

Beweis von (2.14): Wir wählen eine elegante Methode, die noch einmal die Nützlichkeit der komplexen Zahlen zeigt. Mit (7.4) berechnen wir

$$\begin{aligned}\sin(m\,x)\,\sin(n\,x) &= -\frac{1}{4}\left(e^{j\,m\,x} - e^{-j\,m\,x}\right)\left(e^{j\,n\,x} - e^{-j\,n\,x}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(-e^{j\,(m+n)\,x} + e^{j\,(m-n)\,x} + e^{j\,(n-m)\,x} - e^{-j\,(m+n)\,x}\right)\end{aligned} \tag{9.3}$$

und integrieren jeden der vier Terme extra. Alle vier Integrale sind (vom Vorfaktor $\frac{1}{4}$ abgesehen) von der Form

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\,p\,x}\,dx \tag{9.4}$$

für eine ganze Zahl p. Das ist – nicht zufällig — gerade die Struktur von (7.17). Für $p \neq 0$ ergibt sich

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\,p\,x}\,dx = \frac{1}{j\,p}\,e^{j\,p\,x}\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{j}{p}\Big(\underbrace{e^{j\,p\,\pi}}_{\pm 1} - \underbrace{e^{-j\,p\,\pi}}_{\pm 1}\Big) = 0, \tag{9.5}$$

wobei für gerades p die oberen Vorzeichen und für ungerades p die unteren Vorzeichen gelten. Für $p = 0$ reduziert sich das Integral auf (9.1), was gleich 2π ist. Damit ist nebenbei auch (7.17) bewiesen. Da $m, n \geq 1$ gelten soll und daher $m + n$ nicht gleich 0 sein kann, bleiben von den Integralen über die vier Terme in (9.3) nur die beiden mittleren übrig, und das auch nur für $m = n$. Jeder dieser beiden Beiträge ist gleich $\frac{1}{4} \cdot 2\pi$, was insgesamt π ergibt. Daher gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(m\,x)\,\sin(n\,x)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{wenn } m = n \\ 0 & \text{wenn } m \neq n. \end{cases} \tag{9.6}$$

Beweis von (2.15): Der Beweis verläuft ganz analog zum vorigen, wobei wir den Beweis von (7.17) natürlich nicht mehr wiederholen müssen. Mit (7.3) berechnen wir

$$\begin{aligned}\cos(m\,x)\,\cos(n\,x) &= \frac{1}{4}\left(e^{j\,m\,x} + e^{-j\,m\,x}\right)\left(e^{j\,n\,x} + e^{-j\,n\,x}\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(e^{j\,(m+n)\,x} + e^{j\,(m-n)\,x} + e^{j\,(n-m)\,x} + e^{-j\,(m+n)\,x}\right)\end{aligned} \tag{9.7}$$

und integrieren jeden der vier erhaltenen Terme extra. Da $m, n \geq 1$ gelten soll und $m + n$ nicht gleich 0 sein kann, bleiben von den vier Integralen nur die beiden mittleren übrig, und das wegen (7.17) auch nur für $m = n$. Jeder der beiden Beiträge ist gleich $\frac{1}{4} \cdot 2\pi$, was insgesamt π ergibt. Daher gilt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m\,x)\ \cos(n\,x)\,dx = \begin{cases} \pi & \text{wenn } m = n \\ 0 & \text{wenn } m \neq n. \end{cases} \tag{9.8}$$

10 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten. Da konkrete Beispiele in einem Folgeskriptum behandelt werden, geht es in den folgenden Aufgaben vor allem um das grundsätzliche Verstehen des Konzepts der Fourierreihe, weniger um Rechentechniken.

- Falls Sie das Mathematikprogramm *GeoGebra* nicht kennen, besorgen Sie es sich (gratis!) von https://www.geogebra.org/ oder verwenden Sie es online und machen Sie sich damit vertraut! Legen Sie sechs Schieberegler für die Variablen $T > 0$, a_0, a_1, a_2, b_1 und b_2 an, definieren Sie $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und plotten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega\, x) + b_1 \sin(\omega\, x) + a_2 \cos(2\,\omega\, x) + b_2 \sin(2\,\omega\, x). \tag{10.1}$$

  (i) Variieren Sie alle Schieberegler-Variable, um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie (10.1) von ihnen abhängt!
  (ii) Was ändert sich, wenn T verändert wird?
  (iii) Was ändert sich, wenn a_0 verändert wird?

  Lösung von (ii) und (iii):

  (ii) Mit T ändert sich die Periode. Eine Änderung von T bewirkt eine Streckung oder Stauchung des Graphen in x-Richtung.
  (iii) Eine Änderung von a_0 bewirkt eine Verschiebung parallel zur zweiten Achse.

- Legen Sie in *GeoGebra* fünf Schieberegler für die Variablen A_0, A_1, A_2, δ_1 und δ_2 an und plotten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + A_1 \sin(x + \delta_1) + A_2 \sin(2\,x + \delta_2). \tag{10.2}$$

  Stellen Sie als Einheit auf der x-Achse π ein!

  (i) Variieren Sie alle Schieberegler-Variable, um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie (10.2) von ihnen abhängt!
  (ii) Stellen Sie sich vor, jemand anderer stellt $A_0 = 0$ ein und macht entweder A_1 groß und A_2 klein oder A_2 groß und A_1 klein. Erst danach sehen Sie sich den Graphen an. Woran erkennen Sie, ob A_1 oder A_2 groß ist?
  (iii) Machen Sie A_1 und A_2 klein, aber $\neq 0$. Was ändert sich, wenn man δ_1 und δ_2 ändert? Erklären Sie!

  Lösungen von (ii) und (iii):

  (ii) Ist A_1 groß, so dominiert eine Schwingung mit Periode 2π. Ist A_2 groß, so dominiert eine Schwingung mit Periode π.
  (iii) Es ändern sich nur die Phasen. Die Amplituden bleiben klein.

- Plotten Sie in *GeoGebra* das trigonometrische Polynom

$$f(x) = \sin(9\,x) + \sin(10\,x). \tag{10.3}$$

  Stellen Sie als Einheit auf der x-Achse π ein! Erklären Sie in Worten, wie die Form des Graphen zustande kommt. Was könnte die Funktion f beschreiben?

  Lösungen:

  Es handelt sich um eine *Schwebung*, d.h. um die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen mit ungleichen, aber ähnlichen Frequenzen. Nahe $x = 0$ verstärken die beiden Schwingungen einander, aber mit wachsendem x kommen sie außer Takt, bis sie einander nahe $x = \pi$ fast auslöschen. Wächst x weiter, so kommen sie wieder in Takt, bis sie einander nahe $x = 2\pi$ wieder verstärken. Dieses Muster wiederholt sich periodisch. Im Intervall $[0, 2\pi]$ macht $\sin(9\,x)$ genau 9 Schwingungen und $\sin(10\,x)$ genau 10. Da 9 und 10 außer 1 keinen gemeinsamen Teiler haben, sind die beiden Teilschwingungen erst wieder bei 2π in Takt.

- Zeigen Sie, dass für die Kombinationen von (un)geraden Funktionen gilt:

  (i) Summen und Vielfache von geraden Funktionen sind wieder gerade.
  (ii) Summen und Vielfache von ungeraden Funktionen sind wieder ungerade.
  (iii) Das Produkt zweier gerader Funktionen ist gerade.
  (iv) Das Produkt zweier ungerader Funktionen ist *gerade*.
  (v) Das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ist *ungerade*.

  Lösungshinweis:

  Wir zeigen nur (v): Ist u gerade und v ungerade, so gilt für das Produkt $w = u\,v$
  $w(-x) = u(-x)\,v(-x) = u(x)\,(-v(x)) = -u(x)\,v(x) = -w(x)$.
  Daher ist w ungerade.
  Zeigen Sie die anderen Aussagen nach dem gleichen Strickmuster!

- Plotten Sie die Graphen der Funktionen

$$f(x) = \sin(x) + \sin(2x) \tag{10.4}$$
$$g(x) = \cos(x) + \cos(2x). \tag{10.5}$$

  Die Sinus- und die Cosinusfunktion sind nur verschobene Versionen voneinander. Ein Blick auf die Graphen von f und g zeigt, dass sie *nicht* verschobene Versionen voneinander sind. Wie ist das zu erklären, wenn doch g aus f hervorgeht, indem einfach $\sin$ durch $\cos$ ersetzt wird?

  Lösung:

  Es gilt zwar $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, aber $\cos(2x) = \sin(2x + \frac{\pi}{2}) \neq \sin(2(x + \frac{\pi}{2}))$.
  Daher ist $g(x) \neq f(x + \frac{\pi}{2})$.

- Ermitteln Sie
  - die Amplitudenspektren der Funktionen (10.3), (10.4) und (10.5) und stellen Sie sie grafisch dar! (Diese Aufgaben sind sehr leicht.)
  - die Amplitudenspektren und die Phasenspektren der in den Abbildungen 3 und 4 gezeigten Funktionen und stellen Sie sie grafisch dar! (Diese Aufgaben sind ebenfalls nicht allzu schwierig.)

Lösungshinweise:

Die meisten der Amplituden A_n und Anfangsphasen δ_n lassen sich ohne Rechnung aus den angegebenen Ausdrücken ablesen. Lediglich im Fall der Abbildung 4 oben rechts ist eine kleine Rechnung erforderlich: Mit $a_n = \frac{1}{n^3} > 0$ und $b_n = \frac{1}{n^2} > 0$ für $n = 1, 2, \ldots, 20$ errechnen sich die Amplituden A_n gemäß (6.2) und die Anfangsphasen δ_n gemäß (1.12). Für letztere erhält man $\delta_n = \operatorname{atan}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{1}{n}\right)$. Das Phasenspektrum ist in Abbildung 11 dargestellt. Da es sich in allen Fällen um trigonometrische Polynome handelt (die Fourierreihen also alle abbrechen), sind die Amplituden ab einem bestimmten n alle gleich 0 (und die zugehörigen δ_n unbestimmt, aber irrelevant – ihnen sollte in der grafischen Darstellung kein Wert zugewiesen werden).

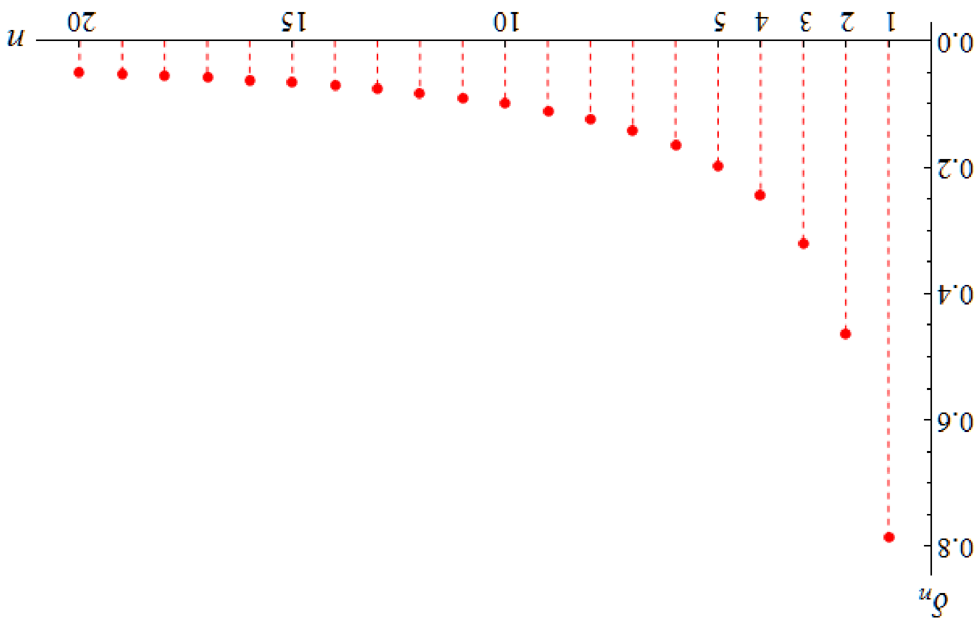


Abbildung 11: Phasenspektrum der in Abbildung 4 oben rechts dargestellten Funktion.

- In der Tabelle der Transformationsformeln am Ende des Abschnitts 8 beweisen Sie die Zeile

$g(x+\varphi)$	$e^{jn\varphi}\, c_n$	$\varphi \in \mathbb{R}$

Lösung:

$$g(x+\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn(x+\varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n e^{jn\varphi}}_{\text{Fourierkoeff.}} e^{jnx}.$$

- In der Tabelle der Transformationsformeln am Ende des Abschnitts 8 verallgemeinern Sie die in der Zeile

$g(x+\varphi)$	$e^{jn\varphi}\, c_n$	$\varphi \in \mathbb{R}$

angegebene Vorschrift auf Fourierreihen zu einer beliebigen Periode T!

Lösung:

Die Fourierkoeffizienten der Funktion f seien c_n.
Sei p durch $p(t) = f(t+\tau)$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$ definiert. Damit ist

$$f(t+\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega(t+\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_n e^{jn\omega\tau}}_{\text{Fourierkoeff.}} e^{jn\omega t}.$$

Daher ist der n-te Fourierkoeffizient von p durch $e^{jn\omega\tau} c_n$ gegeben.
Eine Zeitverschiebung $t \to t+\tau$ von $f(t)$ entspricht der
Multiplikation des n-ten Fourierkoeffizienten mit $e^{jn\omega\tau}$.

- Erklären Sie, warum in der Tabelle der Transformationsformeln am Ende des Abschnitts 8 in den Zeilen

$g(x-\pi)$	$(-1)^n\, c_n$	
$g(x+\pi)$	$(-1)^n\, c_n$	

beide Male in der mittleren Spalte dasselbe steht!

Lösung:

In der linken Spalte steht beide Male dieselbe Funktion!
Aufgrund der Periodizität von g gilt $g(x-\pi) = g(x+\pi)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Eine Verschiebung des Graphen einer 2π-periodischen Funktion
um π nach rechts führt zum selben Ergebnis wie eine
Verschiebung des Graphen um π nach links.

- In der Fourierreihe (5.8) der Kippschwingung kommt der Faktor $(-1)^{n+1}$ vor, was dasselbe ist wie $-(-1)^n$. Lässt man $(-1)^n$ weg, so erhält man die Fourierreihe

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\,\sin(n\,x). \tag{10.6}$$

Geben Sie *in Worten* an, welche Funktion durch diese Reihe dargestellt wird, *ohne* eine Berechnung durchzuführen!

Lösung:

Die Antwort gibt die vorige Aufgabe!
Wegen $(-1)^{-n} = (-1)^n$ überträgt sich mit (7.6)–(7.8) die Regel für die Fourierkoeffizienten einer um π verschobenen Funktion auf die Fourierkoeffizienten a_n (einschließlich a_0) und b_n.
(10.6) stellt daher eine um π verschobene Kippschwingung dar.

- In der Tabelle der Transformationsformeln am Ende des Abschnitts 8 beweisen Sie die Zeile

$e^{j\,k\,x}g(x)$	c_{n-k}	$k \in \mathbb{Z}$

Lösung:

$$e^{j\,k\,x}g(x) = e^{j\,k\,x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{j\,n\,x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{j\,(n+k)\,x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{c_{n-k}}_{\text{Fourierkoeff.}} e^{j\,n\,x}.$$

- Sei g eine reelle Funktion mit Periode 2π, und sei h durch $h(x) = g(x+\varphi)$ für ein $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert. Wie ändern sich das Amplitudenspektrum und das Phasenspektrum beim Übergang von g zu h?

Lösung:

$A_n\,\sin(n\,x+\delta)$ ändert sich zu $A_n\,\sin(n\,(x+\varphi)+\delta_n) = A_n\,\sin(n\,x+\delta_n+n\,\varphi)$.
Daher ändert sich das Amplitudenspektrum überhaupt nicht,
und das Phasenspektrum ändert sich gemäß $\delta_n \to \delta_n + n\,\varphi$.

- Eine berühmte von Leonhard Euler gefundene Beziehung lautet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,. \tag{10.7}$$

Beweisen Sie sie, indem Sie die Parsevalsche Gleichung (8.3) auf die Funktion (5.1) und ihre Fourierreihe (5.8) anwenden!

Lösung:

Wir werten beide Seiten von (8.3) für (5.1) und (5.8) aus:

Linke Seite: $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(x)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}$.

Rechte Seite: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} {b_n}^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$.

Daher gilt $\frac{2\pi^2}{3} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$. Division beider Seiten durch 4 liefert (10.7).

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2018 im Rahmen der Kooperation „Skripten für technische Studiengänge“ (http://www.mathe-online.at/projekte/KooperationFHTWSkripten.html) von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Für Korrekturen danke ich Harald Stockinger.
Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.

[Kleinere Korrekturen werden laufend vorgenommen. Letzte Änderung: 20.9.2023.]